Determinants

Consider the two linear equations for two unknowns x, y

$$\begin{aligned} x a^1_1 + y a^1_2 &= b_1 \\ x a^2_1 + y a^2_2 &= b_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

Do

$$\begin{aligned} x a^1_1 a^2_2 + y a^1_2 a^2_2 &= b_1 a^2_2 \\ x a^2_1 a^1_2 + y a^2_2 a^1_2 &= b_2 a^1_2 \end{aligned}$$

and subtract:

$$x(a^1_1 a^2_2 - a^2_1 a^1_2) = b_1 a^2_2 - b_2 a^1_2 \; . \qquad (*_x)$$

Do

$$\begin{aligned} x a^1_1 a^2_1 + y a^1_2 a^2_1 &= b_1 a^2_1 \\ x a^2_1 a^1_1 + y a^2_2 a^1_1 &= b_2 a^1_1 \end{aligned}$$

and subtract:

$$y(a^1_1a^2_2 - a^2_1a^1_2) = b_2a^1_1 - b_1a^2_1\ . \qquad (*_y)$$

We see that $(*_x), (*_y)$ **have a solution no matter what** b_1, b_2 **are if and only if the determinant**

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (a^1_1a^2_2 - a^2_1a^1_2)$$

of the Coefficient Matrix

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$$

of $(*)$ **is not zero. In that case we get**

$$x = \frac{b_1a^2_2 - b_2a^1_2}{a^1_1a^2_2 - a^2_1a^1_2}$$

$$y = \frac{b_2a^1_1 - b_1a^2_1}{a^1_1a^2_2 - a^2_1a^1_2}$$