Cúbicas Reversas e Redes de Quádricas

I. Vainsencher M.A.G. Zarzar

1999

Uma cúbica reversa é a imagem da aplicação

$$\mathbb{P}^1 \ni [t, u] \mapsto [t^3, t^2u, tu^2, u^3] \in \mathbb{P}^3,$$

para uma escolha adequada de coordenadas homogêneas na reta projetiva $\mathbb{P}^1$ e no espaço projetivo $\mathbb{P}^3$. Ela pode ser visualizada no espaço usual de dimensão três como a curva dada parametricamente por $t \mapsto (t^3, t^2, t)$.

Segundo Harris [4], "This is everybody's first example of a concrete variety that is not a hypersurface, linear space, or finite set of points".

A cúbica reversa é a interseção de três quádricas no espaço projetivo tri-dimensional.

Nosso objetivo é apresentar uma caracterização geométrica explícita para o espaço de formas quadráticas que se anulam exatamente sobre uma cúbica reversa.

O espaço vetorial das quádricas contendo uma cúbica reversa fixa é tri-dimensional: isto é o que se costuma chamar de uma *rede* de quádricas. A rede de quádricas pode ser vista como um plano projetivo $\rho \cong \mathbb{P}^2$ no espaço projetivo de todas as quádricas. Nesse $\mathbb{P}^9$ temos uma hipersuperfície quártica distinguida Δ, dada pelo determinante da matriz simétrica 4×4 associada á quádrica. A hipersuperfície Δ é a subvariedade de $\mathbb{P}^9$ cujos pontos correspondem às quádricas singulares de $\mathbb{P}^3$. A interseção de Δ com o plano ρ é uma curva plana de grau 4. A surpresa é que a equação dessa curva é o quadrado perfeito da equação de uma cônica irredutível.

Nosso principal resultado é provar que vale a recíproca. Seja ρ uma rede de quádricas. Suponha que $\rho \cap \Delta$ é definido pelo quadrado da equação de uma cônica irredutível. Poderíamos esperar que o lugar dos zeros comuns a todas as quádricas de ρ seja uma cúbica reversa? Veremos que a resposta é positiva, se exigirmos que nenhuma quádrica degenerada do tipo par de planos (i.e., com matriz associada de posto ≤ 2) pertença a ρ. Como a cúbica reversa não está contida em um plano de $\mathbb{P}^3$, evidentemente sua rede de quádricas satisfaz essa restrição adicional.

1 Quádricas e seu discriminante

Indicamos o livro [4] para noções e propriedades elementares de variedades projetivas que serão utilizadas.

Denotemos por $z = [z_1, \ldots, z_4]$ as coordenadas homogêneas em $\mathbb{P}^3$.

Uma superfície quádrica em $\mathbb{P}^3$ é definida por uma forma quadrática não nula, i.e., um polinômio homogêneo de grau dois,

$$Q = \sum_{1 \leq i \leq 4} a_{ii} z_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} a_{ij} z_i z_j. \tag{1}$$

O fator 2 é conveniente para a expressão matricial

$$Q = z(a_{ij})z^t.$$

Aparecem dez coeficientes. Note que qualquer múltiplo não nulo de Q define a mesma superfície. É natural então olhar Q ou sua matriz simétrica associada como um ponto no espaço projetivo $\mathbb{P}^9$. Os a_{ij}, $1 \leq i \leq j \leq 4$ são as coordenadas homogêneas para $\mathbb{P}^9$.

O *discriminante* da quádrica é o determinante $\det(a_{ij})$.

Denote por Δ a hipersuperfície quártica de $\mathbb{P}^9$ definida pela anulação do discriminante. Vai desempenhar um papel central no que segue.

Seja $X \subset \Delta$ a subvariedade definida pelos menores 3×3 de (a_{ij}).

Cada ponto $Q \in \mathbb{P}^9 \setminus \Delta$ corresponde a uma quádrica não degenerada. A menos de mudança de coordenadas em $\mathbb{P}^3$, podemos escrever Q na forma

$$Q = z_2 z_3 - z_1 z_4.$$

Essa é muitas vezes referida como a quádrica de Segre, pois é a imagem isomorfa do mapa de Segre,

$$\begin{array}{rcc} \sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ ([x_1, x_2], [y_1, y_2]) & \mapsto & [z_1 = x_1 y_1, z_2 = x_1 y_2, z_3 = x_2 y_1, z_4 = x_2 y_2]. \end{array} \tag{2}$$

Note que a interseção da quádrica de Segre com outra superfície de grau m em $\mathbb{P}^3$ corresponde, pelo mapa acima, a uma curva em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Esta é dada por um polinômio bihomogêneo de bigrau (m, m). Com efeito, se a superfície é definida por um polinômio homogêneo $F(z) = \sum_{|I|=m} c_I z^I$, a substituição $z_1 = x_1 y_1, \ldots, z_4 = x_2 y_2$ fornece um polinômio $F(x, y)$ que'e homogêneo de grau m em cada grupo de variáveis $x = [x_1, x_2], y = [y_1, y_2]$. Verifica-se que a aplicação $\mathbb{C}[z]/\langle Q \rangle \longrightarrow \mathbb{C}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ definida por $z_1 \mapsto x_1 y_1, \ldots, z_4 \mapsto x_2 y_2$ é um isomorfismo sobre a subálgebra gerada pelos $x_i y_j$.

Cada ponto $Q \in \Delta \setminus X$ corresponde a um cone, definido por uma forma quadrática cuja matriz simétrica associada é de posto igual a três. Por uma mudança de coordenadas pode ser escrita na forma

$$Q = z_2^2 - z_1 z_3.$$

O vértice deste cone é o ponto $v(Q) = [0,0,0,1]$. Em geral, o vértice $v(Q) = [v_1, \ldots, v_4]$ de um cone quadrático Q de posto 3 satisfaz a equação matricial

$$v(Q) \cdot (a_{ij}(Q)) = 0. \tag{3}$$

Logo, o vetor de coordenadas homogêneas do vértice nos dá uma base para o núcleo da matriz simétrica associada.

Os pontos de X correspondem a quádricas de posto 2 ou 1. Estas são projetivamente equivalentes a $z_1 z_2$ ou z_1^2. Qualquer dessas é a união de dois planos (possivelmente coincidentes).

2 O hiperplano tangente de Δ

O espaço tangente de uma hipersuperfície de $\mathbb{P}^n$ é dado pelo orotogonal do gradiente do polinômio que a define. Para a hipersuperfície Δ vale a seguinte interpretação geométrica.

O hiperplano tangente $T_{Q_0}\Delta$ no ponto correspondente a um cone não degenerado Q_0 consise de todas as quádricas passando pelo vértice $v(Q_0)$. Em símbolos, temos o seguinte.

2.1 Lema. *Para cada $Q \in \Delta \setminus X$ temos*

$$T_Q\Delta = \{Q' \in \mathbb{P}^9 \,|\, v(Q) \in Q'\}.$$

Prova. Inicialmente fazemos uma mudança de coordenadas para escrever Q como o cone

$${z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2 = 0,$$

i.e., $a_{11}(Q) = a_{22}(Q) = a_{33}(Q) = 1$, $a_{ij}(Q) = 0$ para os demais índices. Seu vértice é $v(Q) = [0,0,0,1]$. Calculemos o gradiente. No nosso caso, Δ é a hypersuperfície dada pelo polinômio $\det(a_{ij})$. Fixe a ordem das variáveis, digamos $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, a_{33}, a_{34}, a_{44}$. O gradiente é

$$\nabla = [D_{11}, 2D_{12}, 2D_{13}, 2D_{14}, D_{22}, 2D_{23}, 2D_{24}, D_{33}, 2D_{34}, D_{44}]\,,$$

onde D_{ij} denota $(-1)^{(i+j-1)}$ vezes o determinante da matriz 3×3 obtida de (a_{ij}) omitindo a i-ésima linha e a j-ésima coluna. No ponto Q, calculamos $\nabla(Q) = [0, ..., 0, 1]$. Logo, seu ortogonal consise de todos os pontos $Q' \in \mathbb{P}^9$ com última coordenada $a_{44}(Q') = 0$. Esta é precisamente a condição de que o vértice $v(Q)$ esteja em Q'. $\square$

3 Redes de quádricas anulando a cúbica reversa

Substitua $z = [t^3, t^2u, tu^2, u^3]$ em (1). Resulta um polinômio homogêneo $Q(t, u)$ de grau seis. Impondo a condição de que se anule identicamente, encontramos um subespaçp dp espaço vetorial de quádricas, de dimensão três. Uma base é dada por

$$Q_1 = z_2^2 - z_1z_3, Q_2 = z_2z_3 - z_1z_4, Q_3 = z_3^2 - z_2z_4.$$

Seja $\rho \subset \mathbb{P}^9$ a rede de quádricas gerada por Q_1, Q_2, Q_3. Sejam $[a_1, a_2, a_3]$ coordenadas homogêneas para o plano projetivo $\rho \cong \mathbb{P}^2$. O elemento geral de ρ é a quádrica $Q_a = \sum a_iQ_i$. Calculemos a interseção $\rho \cap \Delta$. Ela é definida em ρ pelo determinante da matriz associada a Q_a,

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & 2\,a_1 & a_2 & -a_3 \\ -a_1 & a_2 & 2\,a_3 & 0 \\ -a_2 & -a_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (a_1a_3 - a_2^2)^2. \tag{4}$$

Vemos assim que $\rho \cap \Delta$ é uma quártica plana dada pelo quadrado perfeito da equação de uma cônica irredutível. Dizemos também que se trata de uma cônica dupla. Além disso, uma simples inspeção revela que os menores 3×3 na matriz acima só se anulam simultaneamente para $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, o que é proibido para pontos em ρ. Logo temos $\rho \cap X = \emptyset$.

4 Recuperando a cúbica reversa

Fixe uma rede de quádricas $\rho = \langle Q_1, Q_2, Q_3\rangle$ tal que

(i) $\rho \cap \Delta$ é uma cônica dupla C e

(ii) $\rho \cap X = \emptyset$, i.e., ρ não contém par de planos.

Procederemos com a prova de que os zeros comuns dos Q_i formam uma cúbica reversa.

A primeira observação é que os vértices dos cones correspondentes aos pontos sobre a cônica $C = \rho \cap \Delta$ devem descrever uma curva em $\mathbb{P}^3$.

4.1 Lema. $v(C) = \{v(Q) \,|\, Q \in C\} \subset \mathbb{P}^3$ *é uma curva projetiva irredutível.*

Prova. A imagem de uma curva irredutível por um morfismo é ou bem um ponto ou uma curva irredutível. A conclusão desejada seguirá do fato de que o mapa v, que associa a cada cone não degenerado $Q \in C \subset \Delta \setminus X$ o seu vértice $v(Q) \in \mathbb{P}^3$, é um morfismo injetivo.

Mostremos logo que $v : C \to \mathbb{P}^3$ é injetivo. Caso contrário existiriam $Q_1, Q_2 \in C$ distintos e tais que $v(Q_1) = v(Q_2)$. Por uma escolha adequada de coordenadas, podemos supor que o vértice seja $[0, 0, 0, 1]$. Logo z_4 não aparece na equação de Q_i. Seja $L \subset \mathbb{P}^9$ a reta que passa por Q_1 e Q_2. Cada ponto de L é uma quádrica dada por $\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, não ambos nulos. Vemos que todo elemento de L representa um cone com o mesmo vértice. Portanto a reta L está contida na cônica C, contradizendo a hipótese de irreducibilidade.

Para completar a prova, devemos mostrar que v é um morfismo. Isto significa que v pode ser expresso localmente por polinômios. Tome $Q_0 \in C$. Queremos mostrar que existe um mapa polinomial $u : U \longrightarrow \mathbb{P}^3$ tal que $u(Q) = v(Q)\, \forall Q \in U$, onde U é um aberto de $\Delta \setminus X$ contendo Q_0. Estando Q_0 em $C \subset \Delta \setminus X$, a matriz $(a_{ij}(Q_0))$ é de posto exatamente igual a três. Assim, podemos escolher três linhas, digamos $1 \leq \alpha < \beta < \gamma \leq 4$ que sejam linearmente independentes em alguma vizinhança U de Q_0. Trata-se efetivamente de um aberto pois seu complementar é o fechado definido pela anulação dos menores formados com as linhas α, β, γ. Agora para cada $Q \in U$ construa o ponto $u(Q) = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ pela seguinte regra. Ponha

$$B_Q = \begin{pmatrix} i & j & k & l \\ a_{\alpha 1} & a_{\alpha 2} & a_{\alpha 3} & a_{\alpha 4} \\ a_{\beta 1} & a_{\beta 2} & a_{\beta 3} & a_{\beta 4} \\ a_{\gamma 1} & a_{\gamma 2} & a_{\gamma 3} & a_{\gamma 4} \end{pmatrix},$$

onde i, j, k, l denotam indeterminadas e os a_{rs} abreviam $a_{rs}(Q)$. Então z_1, z_2, z_3 e z_4 são definidos pela expansão $\det(B_Q) = z_1 i + z_2 j + z_3 k + z_4 l$ (é similar ao produto vetorial usual). Pela regra de Cramer, o ponto $u(Q)$ é ortogonal às linhas α, β e γ de $(a_{ij}(Q))$. Logo $u(Q) = v(Q)$ (cf. (3)). É claro que a expressão para $u(Q)$ é polinomial nas coordenadas a_{ij}. $\square$

4.2 Proposição. *Notação como acima, temos que a curva $v(C)$ está contida em Q for cada quádrica $Q \in \rho$.*

Prova. Sejam $Q_1, Q_2 \in C$, $Q_1 \neq Q_2$. Seja $L \subset \mathbb{P}^9$ a reta gerada por Q_1 e Q_2. Temos $L \cap \Delta = (L \cap \rho) \cap \Delta = L \cap C = \{Q_1, Q_2\}$ porque C é uma cônica irredutível. Como C é dupla para a interseção $\rho \cap \Delta$, o hiperplano tangente de Δ em cada ponto de C contém ρ. Portanto conterá a reta L. Assim $L \subset T_{Q_1}\Delta \cap T_{Q_2}\Delta$. Pela descrição 2.1 do espaço tangente a Δ, vemos que $v(Q_2) \in Q_1$ e $v(Q_1) \in Q_2$. Fixando Q_1 e fazendo Q_2 variar sobre os demais pontos de C, deduzimos que vale $v(C) \subset Q\ \forall Q \in C$. Como C é uma cônica irredutível, ela gera a rede ρ. Portanto qualquer $Q \in \rho$ é uma combinação linear de quádricas que contêm $v(C)$ donde $Q \supset v(C)$. $\square$

5 Final

Visto que a rede $\rho \not\subset \Delta$, existe uma quádrica não singular $Q_0 \in \rho$ tal que $v(C) \subset Q_0$. A curva irredutível (4.1) $v(C)$ corresponde, pelo mapa de Segre, a uma curva irredutível $D \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong Q_0$. Agora, em $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, D é dada por um polinômio irredutível bihomogêneo $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ de bigrau (a, b). Lembrando que ρ é gerado por três quádricas linearmente independentes, existem duas quádricas, digamos Q_1 e Q_2, independentes módulo Q_0. As interseções de Q_1 e Q_2 com $Q_0 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ são dadas por polinômios bihomogêneos linearmente independentes G_1 e G_2 de bigrau (2,2). Como $v(C) \subset Q_0 \cap Q_1 \cap Q_2$, segue que cada G_i se anula sobre D. Logo F divide G_i. Isso deixa apenas as seguintes possibilidades para o bigrau (a, b) de F: (0,1),(0,2), (1,1), (1,2), (2,2) (e simétricos). Vamos analisar cada possibilidade.

Caso 1: $(a, b) =$ (0,1) or $(a, b) =$ (1,0).

Vamos precisar do seguinte.

5.1 Lema. *Sejam H_1, H_2 polinômios bihomogêneos linearmente independentes de bigrau (2,1) nas variáveis $[x_1, x_2], [y_1, y_2]$. Então existem constantes α_1, α_2 tais que $H = \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2$ pode ser fatorado na forma $H = P_1 P_2$, com* $\operatorname{bideg}(P_1) =$ *(1,1) e* $\operatorname{bideg}(P_2) =$ *(1,0).*

Prova. Seja S o espaço projetivo dos polinômios bihomogêneos de bigrau (2,1). Temos $S \cong \mathbb{P}^5$, e podemos pensar em H_1 e H_2 como pontos distintos nesse $\mathbb{P}^5$. Seja $L \subset \mathbb{P}^5$ a reta passando por H_1 e H_2. Seja

$$S' = \{H \in \mathbb{P}^5 \mid H = P_1 P_2 \text{ com } \operatorname{bideg}(P_1) = (1,1) \text{ e } \operatorname{bideg}(P_2) = (1,0)\}.$$

Note que S' é a imagem de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$ pelo mapa de multiplicação. Aqui $\mathbb{P}^3$ (resp. $\mathbb{P}^1$) denota o espaço projetivo dos polinômios bihomogêneos de bigrau (1,1) (resp. (1,0)). Esse mapa é um morfismo claramente injetivo fora da subvariedade de $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$ formada pelos pares (P_1, P_2) com mdc$\neq 1$. Portanto, S' tem dimensão 4. Como toda hipersuperfície encontra qualquer reta num a espaço projetivo, temos que S' intersecta L. $\square$

Suponha o bigrau $(a, b) =$ (0,1) (o caso (1,0) é análogos). Sejam G_1 e G_2 os polinômios bihomogêneos que correspondem às quádricas independentes Q_1

e Q_2 respectivamente. Dado que $F \mid G_1$ e $F \mid G_2$, existem H_1, H_2 tais que $G_1 = FH_1$ e $G_2 = FH_2$, com bideg(H_1) = bideg(H_2) = (2,1). Pelo lema acima, podemos encontrar $H = \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 = P_1 P_2$, com bideg$(P_1)$ = (1,1) e bideg(P_2) = (1,0). Daí temos $FH = F \cdot (\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2) = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 = (P_1)(FP_2)$. Lembrando o isomorfismo $\mathbb{C}\,[z]\,/\langle Q_0 \rangle \cong \mathbb{C}\,[x_1 y_1, \ldots, x_2 y_2]$ dado pelo mapa de Segre,vemos que o polinômio bihomogêneo P_1 corresponde a uma forma linear $A(z)$. Da mesma maneira, FP_2 corresponde a uma forma linear $B(z)$, valendo uma igualdade $AB = \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_0 Q_0$. Isso mostra que ρ contém o par de planos AB, contrariando a hipótese. Isto elimina o caso 1.

Caso 2: (a, b) = (0,2) or (a, b) = (2,0).

Esse caso é impossível porque um polinômio homogêneo em duas variáveis é um produto de fatores lineares enquanto F é irredutível.

Caso 3: (a, b) = (2,2).

Se (a, b) = (2,2) então $F = \alpha_1 G_1$ e $F = \alpha_2 G_2$, onde α_1 e α_2 são constantes. Assim $\alpha_2 G_1 = \alpha_1 G_2$, contradizendo a independência linear de G_1 e G_2.

Caso 4: (a, b) = (1,1).

Vamos usar o seguinte resultado.

5.2 Lema. *Seja $Q \in \mathbb{P}^9$ uma quádrica que contém uma cônica irredutível $C = Q_0 \cap H$, onde H é um plano e Q_0 é uma quádrica. Então $Q = \alpha Q_0 + LH$, onde α é constante e L é um polinômio linear homogêneo.*

Prova. Podemos fazer uma escolha de coordenadas tal que H é dado por $z_0 = 0$. Agora a interseção de Q_0 e H é obtida substituindo $z_0 = 0$ no polinômio que define Q_0. Resulta um polinômio homogêneo Q'_0 de grau 2 nas variáveis z_1, z_2 e z_3. Seja Q' obtid de Q de forma análoga. Q' se anula onde Q'_0 se anula. Segue que Q'_0 divide Q' e assim $Q' = \alpha Q'_0$. Portanto $Q = \alpha Q_0 + L z_0$. Aqui L é homogêneo de grau 1. □

Se (a, b) = (1,1) então F corresponde pelo mapa de Segre a um plano $H \subset \mathbb{P}^3$. Daí, $v(C)$ deve ser uma cônica, interseção de H e Q_0. Seja Q uma quádrica que contém $v(C)$. Pelo lema acima, segue uma relação $Q = \alpha Q_0 + LH$, onde α é constante e L é homogêneo de grau 1. Sabemos que toda quádrica em ρ contains $v(C)$, e portanto ela pode ser escrita como $\alpha Q_0 + LH$. Mas isso implica que ρ contém pares de planbos. De fato, sejam $Q_1 := \alpha_1 Q_0 + L_1 H$ e $Q_2 := \alpha_2 Q_0 + L_2 H$ elementos distintos na rede ρ. Se $\alpha_2 \neq 0$, então $(\alpha_1 Q_0 + L_1 H) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\alpha_2 Q_0 + L_2 H) = (L_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} L_2)H$ é um par de planos e pertence a ρ, já que se encontra sobre a reta em $\mathbb{P}^9$ ligando Q_1 e Q_2. Como ρ está proibido de conter par de planos, o caso (1,1) é impossível.

Nosso objetivo final é mostrar que, no único caso restante, $v(C)$ é de fato uma cúbica reversa. Isto é bem conhecido mas incluiremos uma prova para conveniência do leitor.

Caso 5: (a, b) = (1,2).

5.3 Proposição. *Seja $D \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ a curva definida por um polinômio bi-homogêneo irredutível $F(x_1, x_2, y_1, y_2)$ de bigrau (1,2). Então a imagem de D pelo mapa de Segre* (2) *é uma cúbica reversa.*

Prova. Podemos escrever

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = A_1(y_1, y_2)x_1 - A_2(y_1, y_2)x_2,$$

onde A_1 e A_2 são polinômios homogêneos de grau 2, e $\mathrm{mdc}(A_1, A_2) = 1$, pois F é irredutível. Para $x_2 A_1 \neq 0$ temos a relação seguinte:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{A_2}{A_1}.$$

Daí seguem as igualdades de pontos em $\mathbb{P}^3$,

$$[x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2] = \left[\frac{x_1y_1}{x_2}, \frac{x_1y_2}{x_2}, y_1, y_2\right] =$$

$$\left[\frac{y_1A_2}{A_1}, \frac{y_2A_2}{A_1}, y_1, y_2\right] = [y_1A_2, y_2A_2, y_1A_1, y_2A_1].$$

Isso mostra que um aberto denso de $v(C)$ coincide com um aberto denso da curva dada parametricamente por

$$\mathbb{P}^1 \ni [y_1, y_2] \mapsto [y_1A_2, y_2A_2, y_1A_1, y_2A_1] \in \mathbb{P}^3.$$

Mostraremos agora que os polinômios y_1A_2, y_2A_2, y_1A_1 e y_2A_1 são linearmente independentes, e assim eles parametrizam umaa cúbica reversa. Sejam α, β, γ e δ constantes tais que

$$\alpha y_1A_2 + \beta y_2A_2 + \gamma y_1A_1 + \delta y_2A_1 = 0.$$

Reescrevemos essa identidade na forma

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)A_2 = -(\gamma y_1 + \delta y_2)A_1.$$

Segue que A_2 divide $(\gamma y_1+\delta y_2)A_1$. Como $\gcd(A_1, A_2) = 1$, deduzimos que A_2 divide $(\gamma y_1 + \delta y_2)$. Sendo o grau de A_2 igual a dois, temos necessariamente $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. $\square$

Observações

(1) Enfatizemos que a hipótese $\rho \cap X = \emptyset$ é essencial. De fato, seja ρ a rede gerada pelas quádricas

$$\begin{aligned} Q_1 &= z_1 z_4, \\ Q_2 &= 2z_1 z_3 + 2z_2 z_4 + (z_3 + z_4)^2 \quad \text{and} \\ Q_3 &= 2z_2 z_3 + z_3^2 + z_4^2. \end{aligned}$$

Calculando $\rho \cap \Delta$ como em (4), obtemos

$$(2a_2^2 - a_1 a_3)^2,$$

novamente o quadrado perfeito de uma cônica irredutível. Mas o lugar dos zeros de Q_1, Q_2 e Q_3 não é uma cúbica reversa pois está contido no par de planos $z_1 z_4 = 0$.

(2) Literatura recente sobre este assunto considera a questão de construir um espaço de parâmetros adequado para o conjunto das cúbicas reversas, cf. [2],[3]. Interesse renovado sobre os espaços de curvas racionais é motivado pelas predições feitas por físicos a respeito do número de tais curvas satisfazendo a certas condições geométricas, cf. [1].

References

[1] D. Cox, S. Katz, *Mirror Symmetry e Algebraic Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, to appear.

[2] G. Ellingsrud, R. Piene, S. Strømme, *On the variedade de redes de quádricas defining cúbica reversas*, Lect. Notes em Mathematics, 1266, 84-96 (1987).

[3] G. Ellingsrud, S. Strømme, *The number de cúbica reversas on the general quintic threefold*, Mathe. Scand. 76, 5-34 (1995).

[4] J. Harris, *Algebraic Geometry - A First Course*, Springer-Verlag New York Inc., 1992.

Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Matemática
Recife PE 50740–540 Brasil