Matrice de scattering et résonances associées à une orbite hétérocline

Setsuro FUJIIÉ
Laboratoire Analyse Géométrie et Applications
Université Paris Nord
et
Mathematical Institute of Tohoku University

Thierry RAMOND
Laboratoire Analyse Géométrie et Applications
Université Paris Nord

Abstract

Nous étudions la matrice de scattering et les résonances de l'opérateur de Schrödinger sur $\mathbb{R}$ en régime semiclassique dans le cas où le potentiel présente deux maximums de même niveau V_0. On calcule le développement asymptotique quand h tend vers 0 des coefficients de la matrice de scattering. On établit alors l'existence de résonances proches de V_0 et l'on décrit très précisement leur position. En particulier, et par rapport au cas d'un unique maximum, la présence d'une orbite hétérocline dans la courbe d'énergie critique $E = V_0$ provoque une concentration des résonances: leur nombre dans un voisinage de V_0 de taille $O(h)$ est d'ordre $|\log h|$. De plus la partie imaginaire de ces résonances est en $O(h/\log h)$ au lieu de $O(h)$ pour un maximum unique. Nous montrons enfin que ces résonances engendrent des oscillations dans le coefficient de transmission pour $E = V_0$, qui n'existent pas dans le cas d'un unique maximum.

0 Introduction

Nous étudions la matrice de scattering et les résonances de l'opérateur de Schrödinger semiclassique unidimensionnel

$$P(x, hD) = h^2 D^2 + V(x) \tag{0.1}$$

où l'on a noté $D = -id/dx$. Nous nous intéressons ici au cas où le potentiel atteint son maximum V_0 en deux points de l'axe réel.

Dans le cas d'un unique maximum, le développement asymptotique des coefficients de la matrice de scattering pour des énergies proches de la valeur critique a été obtenu par l'un des auteurs dans [Ra]. On retrouve aussi dans ce travail, concernant uniquement la dimension 1, des résultats sur l'existence et la répartition des résonances au voisinage de la valeur critique obtenus indépendamment par J.Sjöstrand (cf. $[\mathrm{Sj}]_1$) et P.Briet, J.-M.Combes, P.Duclos (cf. $[\text{B-C-D}]_{1,2}$) dans un cadre multidimensionnel. Ces résultats montrent que les résonances se concentrent en limite semiclassique sur une certaine courbe du plan complexe des énergies, perpendiculaire à l'axe réel en la valeur critique, obtenue comme complémentaire d'une zone sans résonances (cf. aussi [Ko]). Ils montrent également que les résonances les plus proches de l'axe réel ont une partie imaginaire en $O(h)$.

Il existe également plusieurs travaux portant sur les résonances associées à une situation de type "puit dans une île" (cf. en particulier $[\text{He-Sj}]_1$ Ch. 9 et les références qui s'y trouvent). Les résonances sont alors, dans un voisinage du minimum local (supposé non-dégénéré) du potentiel, proches des valeurs propres de l'oscillateur harmonique correspondant, et leur partie imaginaire est exponentiellement petite.

Dans cet article, nous travaillerons avec des potentiels dilatables analytiquement. De manière précise, nous supposerons qu'il existe deux réels $0 < \theta_0 < \pi/2$ et $\delta > 0$ tels que:

(H1) V est réel sur $\mathbb{R}$ et analytique dans le domaine $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{C}; |\operatorname{Im} x| < |\operatorname{Re} x| \tan\theta_0\} \cup \{|\operatorname{Im} x| < \delta\}$

Nous supposerons que le potentiel V tend vers 0 à l'infini dans $\mathcal{S}$, et pour clarifier l'exposé, que V est à courte portée c'est-à-dire

(H2) il existe $C > 0$, $\delta > 0$ tels que $|V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-1-\delta}$

Pour fixer les notations nous énonçons enfin l'hypothèse suivante:

(H3) Soit V_0 la valeur maximum du potentiel sur l'axe réel. L'équation $V(x) = V_0$ admet exactement deux solutions $o_1 < o_2$ sur l'axe réel. De plus on a $V'(o_j) = 0$, $V''(o_j) \neq 0$ pour $j = 1, 2$.

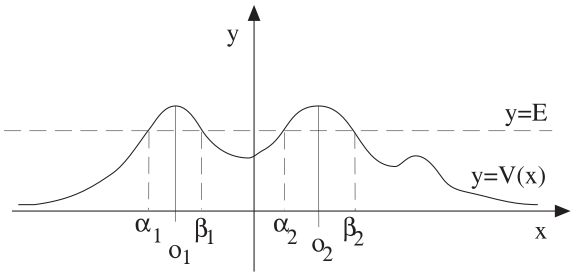

Figure 1: Le potentiel V

Nous nous plaçons toujours dans un disque pointé de rayon R dans $\mathbb{C}$, centré en V_0, pour tout E duquel l'équation $V(x) = E$ admet exactement quatre solutions proches de l'axe réel, appelées *points tournants* (cf. Figure 1).

Dans tout ce travail, les *intégrales d'actions* associées aux deux maximums et au puit entre eux jouent un rôle crucial. De manière précise, notant $\alpha_1(E) < \beta_1(E) < \alpha_2(E) < \beta_2(E)$ les quatre points tournants correspondant à E réel dans $]V_0 - R, V_0[$, on pose

$$S_j(E) = 2\int_{\alpha_j(E)}^{\beta_j(E)} \sqrt{V(x) - E}\, dx \quad \text{pour } j = 1, 2$$

$$S_{int}(E) = 2i\int_{\beta_1(E)}^{\alpha_2(E)} \sqrt{E - V(x)}\, dx$$

$$S_g(E) = -2i\sqrt{E}\alpha_1(E) - 2i\int_{-\infty}^{\alpha_1(E)} \{\sqrt{E - V(x)} - \sqrt{E}\} dx$$

$$S_d(E) = 2i\sqrt{E}\beta_2(E) + 2i\int_{+\infty}^{\beta_2(E)} \{\sqrt{E - V(x)} - \sqrt{E}\} dx$$

On montre dans la Section 2.1 que les fonctions S_j s'étendent holomorphiquement au disque $D(V_0, R) = \{E \in \mathbb{C}; |E - V_0| < R\}$ et que les fonctions S_{int}, S_g et S_d possèdent un prolongement analytique dans ce disque privé de V_0, où leur singularité est de la forme $(V_0 - E)\log(V_0 - E)$.

Rappelons que si V présentait un unique maximum en o_j, les résonances $E_n^j(h)$ proches de V_0 seraient données par la règle de quantification

$$S_j(E) = (2n + 1)i\pi h + O(h^2)$$

et vérifieraient, avec $k_j = \sqrt{-V''(o_j)/2}$ (cf. (2.3)),

$$E_n^j(h) = V_0 - i(2n + 1)k_j h + O(h^2)$$

On notera $\Gamma_j(h)$ l'ensemble de ces $E_n^j(h)$, et $\Gamma(h)$ l'ensemble des résonances pour notre problème.

Dans tout cet article, on verra qu'il faut éviter les ensembles $\Gamma_j(h)$ pour calculer le développement asymptotique de la matrice de scattering. On définit alors $\tilde{S}$ comme étant la restriction du prolongement de S_{int} à $\hat{D}(V_0, R;] - \pi/2, 3\pi/2])$, où $\hat{D}(x_0, r; I)$ est la partie du revêtement universel de $D(x_0, r)$ correspondant à $\arg(x - x_0) \in I$. Notons enfin que, lorsque E tend vers V_0, $\tilde{S}(E)$ tend vers iS_0 où S_0 est l'aire du domaine de l'espace des phases délimité par l'orbite hétérocline incluse dans la courbe d'énergie critique.

Nous obtenons d'abord une description précise de la courbe résonante, qui cette fois est *tangente* à l'axe réel en V_0 (cf. Figure 2).

Théorème 0.1 *Zone sans résonance. Soit B la courbe définie par*

$$B = \{E \in D(V_0, R), \operatorname{Re} \tilde{S}(E) = 0\}$$

Pour chaque compact K de $D(V_0, R)\backslash B$, il existe $h_K > 0$ tel que $\Gamma(h) \cap K = \emptyset$ pour tout $h \in]0, h_K[$. De plus sur la courbe B l'on a

$$\operatorname{Im} E = \begin{cases} \pi \dfrac{\operatorname{Re}(E) - V_0}{\log(\operatorname{Re}(E) - V_0)} + O(\dfrac{\operatorname{Re}(E) - V_0}{(\log(\operatorname{Re}(E) - V_0))^2}) & \textit{pour } \operatorname{Re} E > V_0 \\ 0 & \textit{pour } \operatorname{Re} E < V_0 \end{cases}$$

On cherche ensuite le développement asymptotique des coefficients de la matrice de scattering pour E dans un voisinage complexe de V_0. Dans le cas où les points tournants ne s'agglutinent pas trop vite lorsque h tend vers 0, on peut utiliser la méthode BKW complexe exacte (cf. [Vo], [Ec], [Ge-Gr] ou [Ra]). On obtient le développement asymptotique des solutions de Jost au voisinage des maximums pour E dans des domaines délimités par les lignes $\operatorname{Re} S_j(E) = 0$, et un calcul de wronskiens donne le

Théorème 0.2 *Matrice de Scattering I*
Soit $\mathbb{S} = (s_{j,k})$ la matrice de Scattering pour l'opérateur P (cf. Définition 1.3). Soit $h_0 > 0$ assez petit. Soit $\delta > 0$ un réel assez petit. Il existe $R, r_0 > 0$ tels que, pour tout $h \in]0, h_0]$ et lorsque $E \in \hat{D}(V_0, R;] - \pi/2 + \delta, 3\pi/2 - \delta[)\backslash D(V_0, r_0 h)$, on a:

$$s_{11}(E) = -ie^{S_\infty(E)/2h} \frac{1}{1 + e^{-\tilde{S}(E)/h}}(1 + O(h))$$

Pour $E \in \hat{D}(V_0, R;] - \pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta[)\backslash D(V_0, r_0 h)$, on a aussi:

$$s_{12}(E) = ie^{-S_d(E)/h}(1 + O(h))$$

où la fonction $S_\infty(E)$ est définie par

$$S_\infty(E) + S_1(E) + S_2(E) + S_g(E) + S_d(E) + \tilde{S}(E) = 0$$

Malheureusement cette méthode ne permet pas d'étudier le cas où $|V_0 - E| < r_0 h$ (cf. Prop. 3.2 et 3.3). Nous sommes donc amenés tout comme dans [Mä] ou [Ra] à utiliser des techniques d'analyse microlocale semiclassique développées dans $[\text{He-Sj}]_2$. En particulier on ramène l'étude des solutions au voisinage des maximums à celle d'un opérateur de branchement pour lequel les phénomènes d'effet tunnel dans l'espace des phases peuvent se décrire analytiquement. Après recollement avec les solutions BKW, nous calculons à nouveau la matrice de scattering. On met alors en évidence un terme dit *facteur de pénétration de la barrière* (cf. [L-T-M]). Notant $N(z)$ la fonction définie par

$$N(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+z)} e^{z \log(z/e)} \tag{0.2}$$

où log désigne la détermination principale du logarithme, on a le

Théorème 0.3 *Matrice de Scattering II*
On reprend les mêmes notations. Soit $r > 0$ un réel quelconque. Lorsque $E \in D(V_0, rh)$ n'est pas dans $\Gamma_1(h) \cup \Gamma_2(h)$, on a

$$s_{11}(E) = -ie^{S_\infty(E)/2h} \frac{1}{1 + N(i\frac{S_1(E)}{2\pi h})N(i\frac{S_2(E)}{2\pi h})e^{-\tilde{S}(E)/h}}(1 + O(h \log h))$$

Lorsque $E \in D(V_0, rh)$ n'est pas dans $\Gamma_1(h) \cup \Gamma_2(h) \cup \bar{\Gamma}_2(h)$, on a aussi

$$s_{12}(E) = ie^{-S_d(E)/h} \frac{N(-i\frac{S_2(E)}{2\pi h}) + e^{-\tilde{S}(E)/h} N(i\frac{S_1(E)}{2\pi h})}{1 + N(i\frac{S_1(E)}{2\pi h})N(i\frac{S_2(E)}{2\pi h})e^{-\tilde{S}(E)/h}}(1 + O(h \log h))$$

Remarque 0.4 On verra plus loin que $S_j(E)/h$ tend vers l'infini lorsque $(E - V_0)/h$ tend vers l'infini. On retrouve donc le Théorème 0.2 à partir du Théorème 0.3 en utilisant la formule de Stirling.

Corollaire 0.5 *Pour h fixé assez petit, et lorsque E tend vers V_0, les coefficients de transmission et de réflexion tendent respectivement vers*

$$|s_{11}(V_0)|^2 = \frac{1}{5 + 4\cos(S_0/h)}(1 + O(h \log h))$$

et

$$|s_{12}(V_0)|^2 = \frac{4(1 + \cos(S_0/h))}{5 + 4\cos(S_0/h)}(1 + O(h \log h))$$

et l'on retrouve la relation $|s_{11}(V_0)|^2 + |s_{12}(V_0)|^2 = 1$ modulo une erreur d'ordre $h \log h$. A cette erreur près, $|s_{11}(V_0)|^2$ est compris entre $1/9$ et 1 avec $|s_{11}(V_0)|^2 = 1/9$ quand $S_0 = 2n\pi h$ et $|s_{11}(V_0)|^2 = 1$ quand $S_0 = (2n+1)\pi h$.

Rappelons que dans le cas d'un unique maximum, les coefficients $|s_{11}(V_0)|^2$ et $|s_{12}(V_0)|^2$ sont constants, égaux à $1/2$ (cf. [Ra], Theorem 2).

Les résonances sont les pôles de la matrice de scattering (voir Section 1). Les théorèmes précédents donnent donc immédiatement des règles de quantification pour ces résonances:

Théorème 0.6 *Conditions de quantification*
Supposons que E soit une résonance de l'opérateur P dans $D(V_0, R)$.

1. *Si* $E \notin D(V_0, r_0 h)$ *alors* E *vérifie, pour un certain* $n \in \mathbb{N}$,
$$\tilde{S}(E) = (2n+1)i\pi h + O(h^2)$$

2. *S'il existe un réel* $r > 0$ *tel que* $E \in D(V_0, rh)$ *alors* E *vérifie*
$$\tilde{S}(E) - h \sum_{j=1,2} \log N\left(i\frac{S_j(E)}{2\pi h}\right) = (2n+1)i\pi h + O(h^2 \log h)$$
pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

Il est important de noter que ces deux règles de quantification coïncident dans le domaine où elles s'appliquent simultanément (cf. Remarque 0.4). En utilisant le Théorème de Rouché on obtient finalement le

Théorème 0.7 *Résonances*
Soit $h_0 > 0$ *et* $R > 0$ *assez petits. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *assez grand, il existe* $h_n^- < h_n^+ < h_0$ *tels que, pour tout* $h \in]h_n^-, h_n^+[$ *il existe une unique résonance* $E_n(h)$ *dans* $D(V_0, R)$. *De plus*

1. *Pour tout* $r > 0$, *il existe* $h_n^- < h_{n,r}^- < h_{n,r}^+ < h_n^+$ *tels que pour tout* $h \in]h_{n,r}^-, h_{n,r}^+[$, $E_n(h)$ *se trouve dans* $D(V_0, rh)$. *Alors elle vérifie:*
$$E_n(h) = V_0 + \frac{S_0 - (2n+1)\pi h + ih\log 2}{K \log h} + O(h/(\log h)^2)$$
dans la zone $\mathrm{Re}(E - V_0) = O(h/\log h)$ *et*
$$E_n(h) = V_0 + \frac{S_0 - (2n+1)\pi h}{K \log h} + O(h/\log h)$$
à l'extérieur de cette zone, où $K = (1/k_1 + 1/k_2)/2$ *et* $k_j = \sqrt{-V''(o_j)/2}$.

2. *Lorsque* $E_n(h) \notin D(V_0, r_0 h)$, *on a* $E_n(h) = \tilde{E}_n(h) + o(h)$, *où* $\tilde{E}_n(h) \in B$ *est l'unique solution de l'équation* $\tilde{S}(E) = (2n+1)\pi i h$.

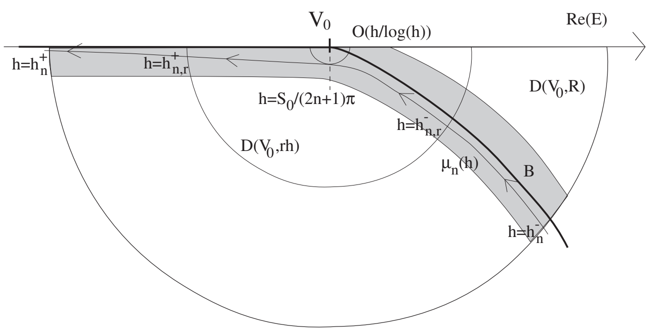

Figure 2: Localisation des résonances et évolution de la n-ième résonance quand h tend vers 0.

Remarque 0.8 Les développements obtenus dans le Théorème 0.7 sont uniformes dans $D(V_0, rh)$ car les résonances se trouvent dans la zone $\operatorname{Im} E = O(h/\log h)$ (cf. le Lemme 4.3), qui ne rencontre pas $\Gamma_1(h) \cup \Gamma_2(h)$.

Remarque 0.9 On voit donc que les résonances les plus proches de V_0 se trouvent à une distance d'ordre $|h/\log h|$ de V_0, au lieu de h dans le cas d'un seul maximum (cf. $[\mathrm{Sj}]_1$, $[\text{B-C-D}]_2$, [Ra]). De plus leur nombre dans un voisinage de V_0 de taille $O(h)$ est ici d'ordre $|\log h|$.

Remarque 0.10 Modulo une erreur d'ordre $O(h/(\log h)^2)$, la partie réelle des résonances $E_n(h)$ est égale à V_0 lorsque $S_0 = (2n+1)\pi h$ ce qui correspond au maximum du coefficient de transmission $|s_{11}(V_0)|^2$. Les oscillations des coefficients de reflexion et de transmission décrites dans le Corollaire 0.5 correspondent donc au passage des résonances à proximité de V_0.

Notre méthode permet de traiter également le cas d'un potentiel présentant deux maximums locaux de niveaux différents, et aussi d'étudier les résonances engendrées par le sommet d'une barrière de potentiel dans l'équation de Schrödinger radiale (cf. [Fu-Ra]).

Cet article est organisé comme suit: on a rassemblé dans cette **Introduction** nos principaux résultats. Dans la **Section 1** nous rappelons les définitions de la matrice de scattering et des résonances pour l'équation de Schrödinger en dimension 1. La **Section 2** est consacrée à l'étude des intégrales d'actions et des lignes de Stokes. Nous y prouvons le Théorème 0.1. Dans la **Section 3** nous calculons la matrice de scattering avec deux méthodes différentes suivant que E tend vers V_0 quand h tend vers 0 ou non. La **Section 4** est consacrée à l'étude des règles de quantifications obtenues à partir des résultats de la section précédente; on y établit ainsi le Théorème 0.7. Nous avons placés dans les **Appendices A et B** les principaux éléments de la méthode BKW exacte, y compris la construction des solutions de Jost. Dans l'**Appendice C** nous rappelons la construction des solutions microlocales. On trouvera enfin dans l'**Appendice D** un glossaire des principales notions d'analyse microlocale semiclassiques utilisées dans le texte.

Remerciements: Les auteurs remercient J.Sjöstrand de leur avoir suggéré cette étude et A.Grigis pour d'utiles discussions.

1 Matrice de scattering et résonances en dimension 1

Nous rappelons rapidement dans cette section quelques définitions classiques concernant la matrice de scattering et les résonances de l'opérateur de Schrödinger en dimension 1.

Lorsque V vérifie l'hypothèse (H1) on peut définir sur $L^2(\mathbb{R})$ l'opérateur

$P_\theta(x,hD)$ de domaine $H^2(\mathbb{R})$ en posant

$$P_\theta(x,hD) = U_\theta P(x,hD)U_{-\theta} = e^{-2i\theta}h^2D^2 + V(xe^{i\theta})$$

où $U_\theta f(x) = f(e^{i\theta}x)$, et ce pour θ dans $\mathbb{R}$ avec $0 \leq \theta < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$. Le théorème de Weyl montre que le spectre essentiel de cet opérateur est la demi-droite $e^{-2i\theta}\mathbb{R}^+$. Soit $\Pi_\theta = \{E \in \mathbb{C}\backslash\{0\}; -2\theta < \arg E < 0\}$ le domaine délimité par cette demi-droite et $\mathbb{R}_+$. Les résonances de l'opérateur P sont alors par définition les éléments de la réunion $\Gamma(h)$ des spectres discrets des opérateurs P_θ pour $0 \leq \theta < \theta_0$ (cf. [He-Ma], Définition 2.1). On a donc la caractérisation suivante des résonances en termes de *fonctions résonantes*:

Définition 1.1 Le nombre complexe E est une résonance pour l'opérateur de Schrödinger (0.1) avec V vérifiant les hypothèses (H1) et (H2), si et seulement si

1. $E \in \Pi_{\theta_0}$
2. Il existe un réel θ, $0 < \theta < \theta_0$ tel que $E \in \Pi_\theta$ et une solution de l'équation $Pu = Eu$ qui appartient à $L^2(\mathbb{R}e^{i\theta})$

Grâce à la décroissance du potentiel à l'infini, on peut montrer (cf. Appendice A) que, pour $E \in \Pi_{\theta_0}$, il existe quatre *solutions de Jost* caractérisées par:

$$\begin{cases} f_d^\pm(x) \sim e^{\pm i\sqrt{E}x/h} & \text{quand } \operatorname{Re} x \to +\infty, x \in \mathcal{S} \\ f_g^\pm(x) \sim e^{\pm i\sqrt{E}x/h} & \text{quand } \operatorname{Re} x \to -\infty, x \in \mathcal{S} \end{cases}$$

où $\sqrt{E}$ est réelle positive lorsque $E \in \mathbb{R}^+$. Notons que lorsque $\theta > -\arg E/2$, les fonctions f_d^+ et f_g^- sont exponentiellement décroissantes sur la demi-droite $e^{i\theta}\mathbb{R}^\pm$ quand $\pm\operatorname{Re} x \to \infty$ respectivement. On a alors

Proposition 1.2 *E est une résonance si et seulement si f_d^+ et f_g^- sont proportionnelles.*

Lorsque E est réelle, les solutions de Jost sortantes (f_d^+, f_g^-) et entrantes (f_g^+, f_d^-) sont linéairement indépendantes et forment donc deux bases de l'espace des solutions. La *matrice de scattering* est par définition la matrice de passage de la base (f_g^+, f_d^-) à la base (f_d^+, f_g^-):

Définition 1.3 On dit que $\mathbb{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ est la matrice de scattering de P si

$$\begin{pmatrix} f_g^+ \\ f_d^- \end{pmatrix} = {}^t\mathbb{S} \begin{pmatrix} f_d^+ \\ f_g^- \end{pmatrix}$$

Nous calculerons plutôt la *matrice de transmission* $\mathbb{T}$ définie par

$$\begin{pmatrix} f_g^+ \\ f_g^- \end{pmatrix} = \mathbb{T} \begin{pmatrix} f_d^+ \\ f_d^- \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de déterminant 1 puisque les wronskiens de f_g^+ et f_g^- d'une part, et de f_d^+ et f_d^- d'autre part sont tous deux égaux à $2i\sqrt{E}/h$. On a aussi $f_{d,g}^- = (f_{d,g}^+)^*$ (où l'on a noté $u^*(x,E) = \overline{u(\bar{x},\bar{E})}$), donc $\mathbb{T}(E)$ s'écrit

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} t(E,h) & r(E,h) \\ r(E,h)^* & t(E,h)^* \end{pmatrix}$$

En fonction des coefficients de la matrice de transmission, la matrice de scattering s'écrit

$$\mathbb{S} = \frac{1}{t(E,h)^*} \begin{pmatrix} 1 & -r(E,h)^* \\ r(E,h) & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Comme on le verra plus loin, les coefficients de la matrice de transmission s'écrivent comme wronskiens de fonctions analytiques en E et sont donc eux-même analytiques. La matrice de scattering possède donc un prolongement méromorphe dont les pôles sont les éventuels zéros du coefficient $t(E,h)^*$. On peut d'ailleurs noter que pour E réelle $t(E,h)^* = \overline{t(E,h)}$, $r(E,h)^* = \overline{r(E,h)}$ et

$$|t(E,h)|^2 - |r(E,h)|^2 = 1$$

donc la matrice de scattering n'a pas de pôle sur le réel. Enfin par définition de la matrice de transmission on a

$$f_g^- = r(E,h)^* f_d^+ + t(E,h)^* f_d^-$$

ce qui montre que f_g^- et f_d^+ sont proportionnelles si et seulement si $t^*(E,h)$ s'annule. La Proposition 1.2 donne alors la caractérisation suivante des résonances:

Proposition 1.4 *Les résonances sont les pôles des coefficients diagonaux de la matrice de scattering.*

2 Zone sans résonance

2.1 Intégrales d'actions

Nous étudions les *intégrales d'action* qui vont jouer un rôle essentiel par la suite. Rappelons d'abord quelques notations: on note V_0 le maximum du potentiel sur l'axe réel et l'on a $V(x) = V_0$ si et seulement si $x = o_1$ ou $x = o_2$ avec $o_1 < o_2$. On suppose de plus que ces maximums sont non-dégénérés et l'on pose

$$\mu = V_0 - E \quad k(x)^2 = V_0 - V(x), \quad k_j = \sqrt{-V''(o_j)/2}$$

où $k(x)$ est une fonction analytique près de l'axe réel avec $k(x) > 0$ quand $x > o_2$. On a alors $k(o_j) = 0$, $k'(o_j) = (-1)^j k_j$ pour $j = 1, 2$ et

$$V(x) - E = \mu - k(x)^2 \tag{2.1}$$

Dans toute la suite nous noterons également $D(r) = \{\mu \in \mathbb{C}; |\mu| < r\}$ et $\hat{D}(r)$ le revêtement universel de $D(r) - \{0\}$. On notera enfin

$$\hat{D}(r; I) = \{\mu \in \hat{D}(r), \arg \mu \in I\}$$

Puisque nous cherchons les résonances E proches de V_0 et qu'elles ont une partie imaginaire négative, il est naturel de supposer que μ est dans $\hat{D}(R,]0, \pi[)$ pour un certain R assez petit. Nous définissons donc d'abord les intégrales d'actions pour μ dans ce domaine.

Lorsque $\mu = V_0 - E$ est réel positif assez petit, l'équation $\mu = k^2(x)$ admet exactement quatre racines simples que l'on note $\alpha_1(\mu) < \beta_1(\mu) < \alpha_2(\mu) < \beta_2(\mu)$, les deux premières étant proches du maximum o_1, les deux autres du maximum o_2 (cf. Figure 1). Ces quatre fonctions de μ se prolongent analytiquement à $\hat{D}(R)$. Pour chaque μ donné, ces quatre points sont appelés *points tournants* de l'équation correspondante

$$h^2 D^2 u + (\mu - k^2(x))u = 0 \tag{2.2}$$

Nous choisissons les déterminations de sorte que $(\mu - k(x)^2)^{1/2} \in i\mathbb{R}_+$ lorsque $\mu > 0$ et que $x \in \mathbb{R}$ est assez grand, et plaçons les coupures entre α_j et β_j $(j = 1, 2)$ (cf. Figure 3) et de sorte que $\sqrt{E} = \sqrt{V_0 - \mu} > 0$ lorsque $E = V_0 - \mu > 0$. Remarquons que avec ces déterminations la limite de $(\mu - k(x)^2)^{1/2}$ quand $|x| \to \infty$ dans $\mathcal{S}$ sur le premier feuillet coincide avec $i\sqrt{E}$. On définit alors

$$S_{int}(\mu) = \int_{\gamma_{int}} (\mu - k(x)^2)^{1/2} dx \qquad S_{ext}(\mu) = \int_{\gamma_{ext}} (\mu - k(x)^2)^{1/2} dx$$

$$S_j(\mu) = \int_{\gamma_j} (\mu - k(x)^2)^{1/2} dx, \quad (j = 1, 2)$$

$$S_g(\mu) = -2i\sqrt{E}\alpha_1(\mu) - 2\int_{\gamma_g} \{(\mu - k(x)^2)^{1/2} - i\sqrt{E}\} dx$$

$$S_d(\mu) = 2i\sqrt{E}\beta_2(\mu) + 2\int_{\gamma_d} \{(\mu - k(x)^2)^{1/2} - i\sqrt{E}\} dx$$

$$S_\infty(\mu) = 2\int_{\gamma_\infty} \{(\mu - k(x)^2)^{1/2} - i\sqrt{E}\} dx$$

où γ_{int}, γ_{ext}, γ_j $(j = 1, 2)$, γ_g, γ_d, γ_∞ sont des chemins sur la surface de Riemann de $(\mu - k(x)^2)^{1/2}$ comme dans la Figure 3.

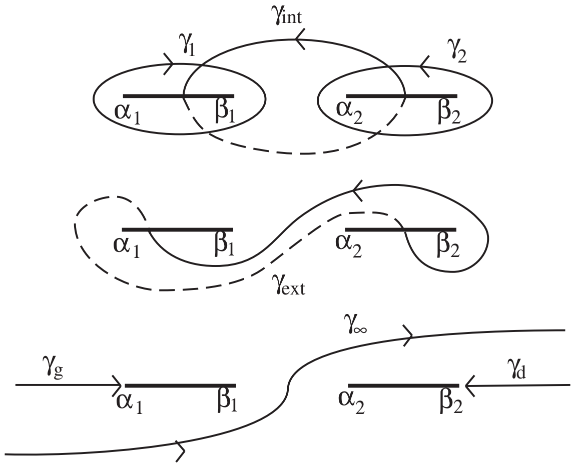

Figure 3: Intégrales d'action

En remarquant que les deux déterminations de $(\mu - k(x)^2)^{1/2}$ ne diffèrent que par leur signe, et donc qu'un chemin orienté dans un sens sur l'un des feuillets peut être considéré comme un chemin de l'autre feuillet orienté dans le sens opposé, on voit que

$$S_{ext}(\mu) = S_{int}(\mu) + S_1(\mu) + S_2(\mu)$$

même si, au niveau du groupe fondamental de $\mathcal{S}\backslash\{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$, on n'a pas la relation correspondante. On a également

$$S_\infty(\mu) + S_g(\mu) + S_d(\mu) + S_1(\mu) + S_2(\mu) + S_{int}(\mu) = 0$$

Quand μ tend vers 0, $S_1(\mu)$ et $S_2(\mu)$ tendent de manière évidente vers 0 alors que S_{ext} et S_{int} tendent vers iS_0, où

$$S_0 = 2\int_{o_1}^{o_2} |k(x)| dx$$

est l'aire du domaine de l'espace des phases délimité par l'orbite hétérocline incluse dans $p^{-1}(V_0)$, où $p(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$ est le symbole principal de $P(x, hD)$. On peut préciser davantage le comportement de ces actions au voisinage de $\mu = 0$. C'est l'objet du

Lemme 2.1 *(i) Les fonctions $S_j(\mu)$ $(j = 1, 2)$ et $S_\infty(\mu)$ sont analytiques en $\mu = 0$. En particulier, $S_j(\mu)$ sont réelles sur $\mathbb{R}$, et*

$$S_j(\mu) = \frac{\pi}{k_j}\mu + O(\mu^2) \tag{2.3}$$

(ii) Il existe des fonctions $A_{int}(\mu)$ $A_g(\mu)$ et $A_d(\mu)$ analytiques en $\mu = 0$, réelles sur $\mathbb{R}$ avec $A_{int}(0) = S_0$ telles que

$$S_{int}(\mu) = -\frac{1}{2\pi i}(S_1(\mu) + S_2(\mu)) \log \mu + iA_{int}(\mu) \tag{2.4}$$

$$S_g(\mu) = \frac{1}{2\pi i} S_1(\mu) \log \mu + iA_g(\mu) \tag{2.5}$$

$$S_d(\mu) = \frac{1}{2\pi i} S_2(\mu) \log \mu + iA_d(\mu) \tag{2.6}$$

où $\log \mu$ est réel lorsque $\mu \in \mathbb{R}^+$.

Preuve: D'abord, il est évident que les $S_j(\mu)$ $(j = 1, 2)$ et $S_\infty(\mu)$ sont analytiques à l'origine car on peut choisir γ_j $(j = 1, 2)$ et γ_∞ indépendamment de μ. Avec la détermination de $(\mu - k(x)^2)^{1/2}$ choisie, on a

$$(\mu - k(x)^2)^{1/2} = ik(x)(1 - \frac{\mu}{k(x)^2})^{1/2} = ik(x) - \frac{i\mu}{2k(x)} + O(\mu^2)$$

quand μ est petit. On a donc (2.3) par le théorème des résidus. Nous calculons maintenant $S_{int}(e^{2\pi i}\mu)$. Quand μ tourne une fois autour de 0 dans le sens positif à partir de $\mu > 0$, les points tournants α_j, β_j échangent leur positions en tournant dans le sens positif autour de o_j et le chemin d'intégration γ_{int} est transformé en un chemin $\tilde{\gamma}_{int}$. Nous avons donc

$$S_{int}(e^{2\pi i}\mu) = \int_{\tilde{\gamma}_{int}} (\mu - k(x)^2)^{1/2} dx.$$

En raisonnant au niveau du groupe fondamental on voit alors que

$$S_{int}(e^{2\pi i}\mu) - S_{int}(\mu) = -(S_1(\mu) + S_2(\mu))$$

et l'on obtient (2.4). On peut prouver (2.5) et (2.6) de la même manière. □

Avec ce lemme, on voit immédiatement que $S_j > 0$ quand $\mu > 0$ et que $S_j < 0$ quand $\mu < 0$. On a aussi $S_{int} \in i\mathbb{R}_+$ quand $\mu > 0$. D'autre part, d'après (2.4) on a

$$S_{ext}(\mu) = S_{int}(\mu) + S_1(\mu) + S_2(\mu) = S_{int}(e^{-2\pi i}\mu) \tag{2.7}$$

et donc S_{ext} est un prolongement analytique de S_{int}. On a déjà vu dans l'introduction que nous devrons utiliser la détermination $\tilde{S}$ de S_{int} définie dans $\hat{D}(R,]-3\pi/2, \pi/2])$. Notons en particulier que l'on a $\tilde{S}(\mu) = S_{int}(\mu)$ pour $\mu > 0$ et $\tilde{S}(\mu) = S_{ext}(\mathrm{e}^{2i\pi}\mu)$ pour $\mu < 0$.

2.2 Lignes de Stokes et zone sans résonances

La notion de *ligne de Stokes* va jouer un rôle important dans ce qui suit (cf. [Ge-Gr], [Ra], [Fu-Ra]...):

Définition 2.2 Soit $x \in \mathcal{S}$. On appelle ligne de Stokes passant par x l'ensemble

$$\left\{ y \in \mathcal{S}, \operatorname{Re} \int_x^y (V(x) - E)^{1/2} dx = 0 \right\}$$

Remarquons que grâce à l'hypothèse *(H2)*, les lignes de Stokes ont pour asymptotes les droites d'angle $-\arg E/2$ par rapport à l'axe réel quand $|x|$ est grand.

Proposition 2.3 *Soit E un nombre complexe indépendant de h. Soit C_θ l'ensemble des chemins simples du secteur $\mathcal{S}$ qui coïncident avec $\mathbb{R}e^{i\theta}$ en dehors d'un compact. S'il existe un chemin de C_θ qui est toujours transverse aux lignes de Stokes avec $\theta \in] - \dfrac{1}{2} \arg E, \theta_0[$, alors E n'est pas une résonance pour tout h assez petit.*

Preuve: Notons d'abord que dans la Définition 1.1, on peut remplacer la droite $\mathbb{R}e^{i\theta}$ par n'importe quel chemin $\gamma \in C_\theta$, puisque les solutions de l'équation $Pu = Eu$ sont analytiques dans $\mathcal{S}$. Soit donc γ un tel chemin et $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) \in \mathcal{S}$ une paramétrisation de γ telle que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit alors $P_\gamma(t, hD_t, E) = P(\gamma(t); \gamma'(t)^{-1} hD_t) - E$ l'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}_t)$ obtenu par changement de variable à partir de $P(x, hD) - E$. Puisque E ne dépend pas de h, le symbole principal en tant qu'opérateur h-différentiel de P_γ est

$$p_\gamma(t, \tau, E) = \frac{1}{\gamma'(t)^2} \left(\tau^2 + \gamma'(t)^2 (V(\gamma(t)) - E) \right)$$

En particulier P_γ est h-elliptique, donc inversible pour tout h assez petit, dès que $\operatorname{Re} \gamma'(t)(V(\gamma(t)) - E)^{1/2} > C > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, c'est à dire dès que, pour tout t, $\gamma'(t)$ est orthogonal au point $\gamma(t)$ au champ de vecteurs de $\mathcal{S}$ définit par $s(x) = \overline{i(V(x) - E)^{1/2}}$. On vérifie enfin facilement que les lignes de Stokes sont les courbes intégrales de ce champ de vecteurs. □

On notera A la zone sans résonance, composée des énergies E pour lesquelles il existe θ avec $-\arg E/2 < \theta < \theta_0$ et un chemin $\gamma \in C_\theta$ transverse aux lignes de Stokes. Puisque les chemins de C_θ sont toujours transverses aux lignes de Stokes en dehors d'un compact pour $\theta > -\arg E/2$, on a facilement la

Proposition 2.4 *Soit K un compact dans A. Alors il existe $h_K > 0$ tel que $\Gamma(h) \cap K = \emptyset$ pour $0 < h < h_K$.*

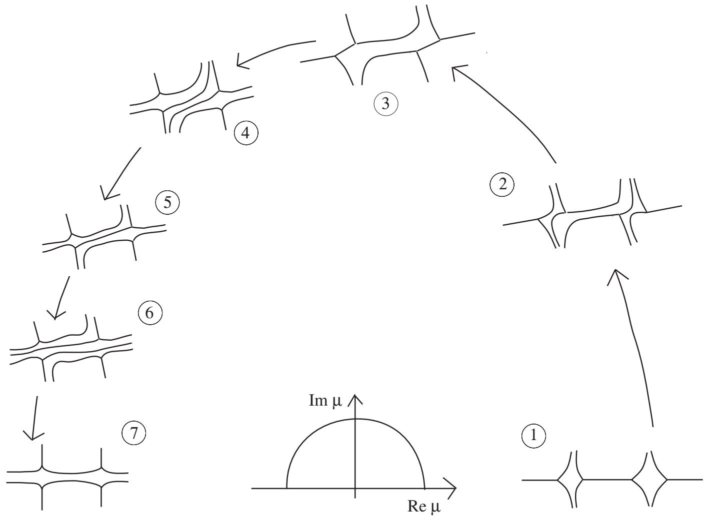

Figure 4: Evolution des lignes de Stokes

Soit B le complémentaire de A. De manière un peu imprécise, on peut dire les choses suivantes lorsque h est assez petit: (1) les résonances sont proches de B, (2) les lignes de Stokes pour une énergie résonante E sont "proches" de celles correspondant à une énergie dans B assez proche de E.

Dans le reste de cette section nous décrivons l'ensemble B, et commençons par étudier l'allure des lignes de Stokes. Si l'on fait tourner μ autour de $\mu = 0$ à partir de $\arg\mu = 0$ jusqu'à $\arg\mu = \pi$ tout en restant assez petit, les lignes de Stokes évoluent comme indiqué dans la Figure 4.

On voit qu'il existe toujours un chemin appartenant à C_θ qui est transverse aux lignes de Stokes sauf dans les cas (1) et (5), c'est-à-dire sauf si β_1 et α_2 ou α_1 et β_2 sont liés par une lignes de Stokes dans $\mathcal{S}$. Nous avons alors la

Proposition 2.5 *Il existe $R > 0$ tel que $B \cap \hat{D}(R) = B_{int} \cup B_{ext}$, où*

$$B_{int} = \{\mu \in \hat{D}(R, [0, \pi]), \mathrm{Re}\, S_{int}(\mu) = 0\}$$

$$B_{ext} = \{\mu \in \hat{D}(R, [0, \pi]), \mathrm{Re}\, S_{ext}(\mu) = 0\}$$

Nous allons tracer les courbes B_{int} et B_{ext} pour μ dans $\hat{D}(R)$. Nous récrivons B_{ext} en terme du prolongement analytique de S_{int} (cf. Equation 2.7)

$$B_{ext} = \{\mu \in \hat{D}(R, [0, \pi]), \mathrm{Re}\, S_{int}(\mathrm{e}^{-2i\pi}\, \mu) = 0\}.$$

Il suffit donc d'étudier les courbes $\{\mathrm{Re}\, S_{int}(\mu) = 0\}$ sur la surface de Riemann de $S_{int}(\mu)$. D'après (2.4), on a

$$\frac{S_{int}(\mu)}{i} = S_0 + K\mu \log \mu + \delta(\mu)$$

où $K = (1/k_1 + 1/k_2)/2$, $S_{int}(\mu)/i$ est réel pour $\mu > 0$ assez petit et $\delta(\mu) = O(\mu)$. L'application $f(\mu) - S_0 = S_{int}(\mu)/i - S_0$ est à valeurs réelles négatives pour μ positif assez petit, et nous fixons les arguments de μ et $f(\mu) - S_0$ de sorte que $\arg(f(\mu) - S_0) = \pi$ lorsque $\arg \mu = 0$.

Proposition 2.6 *Soit $\theta_1 < \theta_2$ et $r > 0$ suffisament petit.*

1. *Il existe $\phi_1 < \phi_2$ et $R > 0$ tels que $f(\mu) = S_{int}(\mu)/i$ est une fonction biholomorphe de $\hat{D}(r;]\theta_1, \theta_2[)$ dans $\hat{D}(S_0, R;]\phi_1, \phi_2[) = \{\lambda; \lambda - S_0 \in \hat{D}(R;]\phi_1, \phi_2[)\}$.*

2. *De plus si $\mu(t)$ $(0 < t \leq 1)$ est une courbe dans $\hat{D}(r;]\theta_1, \theta_2[)$ telle que*
$$\lim_{t\to 0} |\mu(t)| = 0, \qquad \lim_{t\to 0} \arg \mu(t) = \theta \quad (\theta_1 < \theta < \theta_2)$$
alors
$$\lim_{t\to 0} |f(\mu(t))| = S_0, \qquad \lim_{t\to 0} \arg(f(\mu(t)) - S_0) = \theta + \pi$$

3. *En particulier, si $-2\pi < \theta_1 < -\pi$, $0 < \theta_2 < \pi$ et r est assez petit, il existe une unique courbe B_{ext} (resp. B_{int}) dont l'image par $\lambda = f(\mu)$ est $\{\lambda \in \mathbb{R}; 0 < (\lambda - S_0) < \epsilon\}$ (resp. $\{\lambda \in \mathbb{R}; 0 < -(\lambda - S_0) < \epsilon\}$ pour $\epsilon > 0$ petit. Les courbes B_{ext} et B_{int} s'écrivent:*
$$B_{ext} = \{\mu; \operatorname{Im}\mu = \pi \frac{\operatorname{Re}\mu}{\log|\operatorname{Re}\mu|} + O(\frac{\operatorname{Re}\mu}{(\log|\operatorname{Re}\mu|)^2})\}$$
$$B_{int} = \{\mu; \operatorname{Im}\mu = 0\}$$

Preuve: On définit deux fonctions g et h de $\{\operatorname{Re}\xi << -1\}$ dans la surface de Riemann de $\log \mu$ et de $\log(\lambda - S_0)$ respectivement en posant $\mu = g(\zeta) = e^\zeta$ et $\lambda = h(\zeta) = S_0 + K\zeta e^\zeta + \delta(e^\zeta)$. Pour r suffisament petit, $g'(\zeta)$ et $h'(\zeta)$ ne s'annulent pas dans $\omega = \{\zeta \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\zeta < \log r, \theta_1 < \operatorname{Im}\zeta < \theta_2\}$, donc g est biholomorphe de ω dans $g(\omega) = \hat{D}(r;]\theta_1, \theta_2[)$ et h l'est de ω dans $h(\omega)$, un sous-ensemble dont l'adherence contient 0 de $\hat{D}(S_0, R;]\phi_1, \phi_2[)$, pour certains R, ϕ_1 et ϕ_2. La fonction $f = h \circ g^{-1}$ est donc biholomorphe de $\hat{D}(r;]\theta_1, \theta_2[)$ dans $\hat{D}(S_0, R;]\phi_1, \phi_2[)$.

Soit ensuite $\mu(t)$ $(0 < t \leq 1)$ une courbe vérifiant
$$\lim_{t\to 0} |\mu(t)| = 0 \qquad \lim_{t\to 0} \arg \mu(t) = \theta \quad (\theta_1 < \theta < \theta_2)$$
Alors $\zeta(t) = g^{-1}(\mu(t))$ est une courbe dans ω telle que
$$\lim_{t\to 0} \operatorname{Re}\zeta(t) = -\infty, \qquad \lim_{t\to 0} \operatorname{Im}\zeta(t) = \theta$$

et $f(\mu(t)) = h \circ g^{-1}(\mu(t))$ est une courbe dans $D(R;]\phi_1, \phi_2[)$ vérifiant

$$\lim_{t\to 0} |f(\mu(t))| = \lim_{t\to 0}(|\zeta(t)|e^{\mathrm{Re}\,\zeta(t)} + O(e^{\mathrm{Re}\,\zeta(t)})) = S_0$$

$$\lim_{t\to 0} \arg(f(\mu(t)) - S_0) = \lim_{t\to 0}(\mathrm{Im}\,\zeta(t) + \arg\zeta(t) + o(t)) = \theta + \pi$$

où $\lim \arg\zeta(t) = \pi$ s'obtient par la détermination de l'argument de $f(\mu)$.

Posons enfin $\zeta = \xi + i\eta$. Si $\mathrm{Im}\,h(\zeta) = K\mathrm{Im}\,\zeta e^{\zeta} + O(e^{\xi}) = 0$, on a

$$\eta\cos\eta + \xi\sin\eta = O(e^{\xi}) \qquad (\xi \to -\infty)$$

On cherche alors les courbes $\mu(t)$ de $\hat{D}$ que f envoie sur l'axe réel. On voit que pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, il y a une courbe $\tilde{B}_n$ dans le plan complexe de ζ avec $-\xi = -\mathrm{Re}\,\zeta$ assez grand sur laquelle $\mathrm{Im}\,h(\zeta) = 0$ et où η tend vers $n\pi$ quand ξ tend vers $-\infty$. Plus précisément,

$$\begin{cases} \eta = 0 & \text{sur} \quad \tilde{B}_0 \\ \xi = \dfrac{-n\pi}{\eta - n\pi} + O(1) \quad (\eta \to n\pi) & \text{sur} \quad \tilde{B}_n, \quad n \neq 0 \end{cases}$$

La courbe $g(\tilde{B}_n)$ est tangente à l'axe réel en 0, contenue dans $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ si n est pair et dans $\mathrm{Re}\,\mu < 0$ si n est impair. On va étudier le premier terme du développement asymptotique de cette courbe. On a d'abord $\mathrm{Im}\,g(\tilde{B}_0) = 0$. On suppose donc $n \neq 0$ par la suite.

Posons $\mu = x + iy$. On a $x = e^{\xi}\cos\eta$, $y = e^{\xi}\sin\eta$ et

$$\log|x| = \xi + \log|\cos\eta| = \frac{-n\pi}{\eta - n\pi} + O(1)$$

$$\frac{y\log|x|}{x} = (\xi + \log|\cos\eta|)\tan\eta = -n\pi + O(\eta - n\pi)$$

quand η tend vers $n\pi$ le long de $\tilde{B}_n$. On a par la première égalité $\eta - n\pi = O(1/\log|x|)$ et donc par la deuxième égalité

$$y = -n\pi\frac{x}{\log|x|} + O(\frac{x}{(\log|x|)^2})$$

quand $\mu = x + iy$ tend vers 0 le long de $g(\tilde{B}_n)$. En particulier, on a $B_{ext} = g(\tilde{B}_{-1})$ et $B_{int} = g(\tilde{B}_0)$ □

Remarque 2.7 La courbe B peut s'écrire simplement à l'aide de la fonction $\tilde{S}$. En effet puisque cette courbe est tangente à l'axe réel à l'origine, elle est entièrement contenue dans le domaine de définition de $\tilde{S}$ pour $\delta > 0$ assez petit et l'on a

$$B = \{\mu \in \hat{D}(R;] - (3\pi/2 - \delta), \pi/2 - \delta[) \ ; \ \mathrm{Re}\,\tilde{S}(\mu) = 0\}$$

3 Matrice de scattering

Dans cette section nous calculons le développement asymptotique quand $h \to 0$ de la matrice de scattering pour l'équation de Schrödinger

$$(h^2 D^2 + V(x))u = Eu \tag{3.1}$$

Notre méthode consiste à calculer les développements asymptotiques des coefficients de cette matrice en les écrivant comme (quotients de) wronskiens de solutions de Jost. La principale difficulté consiste à obtenir les développements asymptotiques de ces solutions au voisinage des sommets o_1 et o_2, et c'est pourquoi nous commençons par étudier une *matrice de transition* M_j ou matrice de passage d'une base de solutions définie à gauche de o_j à une base définie à droite de o_j pour $j = 1, 2$. Nous revenons ensuite au problème global en recollant les solutions définies au voisinage des sommets avec les solutions de Jost.

Rappelons que pour $\mu = V_0 - E$ assez petit, il y a deux points tournants $\alpha_1(\mu)$ et $\beta_1(\mu)$ dans un petit voisinage Ω_1 du sommet o_1, et deux points tournants $\alpha_2(\mu)$ et $\beta_2(\mu)$ dans un petit voisinage Ω_2 du sommet o_2. On fixe une fois pour toute les déterminations de $x \mapsto (\mu - k(x)^2)^{1/2}$ et de $x \mapsto (\mu - k(x)^2)^{1/4}$ en plaçant une coupure entre α_1 et β_1 et entre α_2 et β_2 pour $(\mu - k(x)^2)^{1/2}$, et en ajoutant une autre coupure entre β_2 et α_1 pour $(\mu - k(x)^2)^{1/4}$. Les fonctions $(\mu - k(x)^2)^{1/2}$ et $(\mu - k(x)^2)^{1/4}$ sont supposées dans $i\mathbb{R}_+$ et dans $e^{i\pi/4}\mathbb{R}_+$ respectivement lorsque $\mu > 0$ et $x > \beta_2(\mu)$. Soit aussi a un réel positif et B_δ la bande

$$B_\delta = \{x \in \mathcal{S}, o_1 - a < \operatorname{Re} x < o_2 + a, |\mathrm{Im} x| < \delta\}$$

L'ensemble Φ_μ des lignes des Stokes dans B_δ issues des points tournants $\alpha_j(\mu)$, $\beta_j(\mu)$ $(j = 1, 2)$ reste pour $|\mu|$ petit dans un voisinage Φ de Φ_0, constitué par l'intersection de B_δ avec la droite $\mathrm{Im}\, x = 0$ et les lignes perpendiculaires à cette droite aux points o_1 et o_2 (cf. Figure 5).

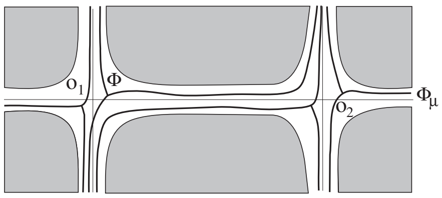

Figure 5: Stabilité des lignes de Stokes

3.1 Transition près d'un sommet

Nous étudions ici les matrices de transition associées aux maximums non dégénérés du potentiel. Nous nous plaçons d'abord dans un voisinage Ω_2 du maximum

o_2. Avec notre choix pour la détermination de $(\mu - k(x)^2)^{1/2}$, on remarque d'abord que la partie réelle de la phase

$$z(x,\mu) = \int^x (\mu - k(x)^2)^{1/2}\, dx$$

est croissante à droite de o_2 lorsque $\operatorname{Im} x$ décroit, et qu'elle est croissante à gauche de o_2 lorsque $\operatorname{Im} x$ croit.

L'intersection de Ω_2 avec l'extérieur de Φ dans B_δ est constitué de quatre composantes connexes que l'on désigne par $\Omega_{d,g}^{2,\pm}$ (cf. Figure 6). Notons que l'on a choisi les signes de sorte que la partie réelle de la phase soit toujours croissante lorsque l'on passe d'un domaine de type $\Omega^{2,+}$ à un domaine de type $\Omega^{2,-}$.

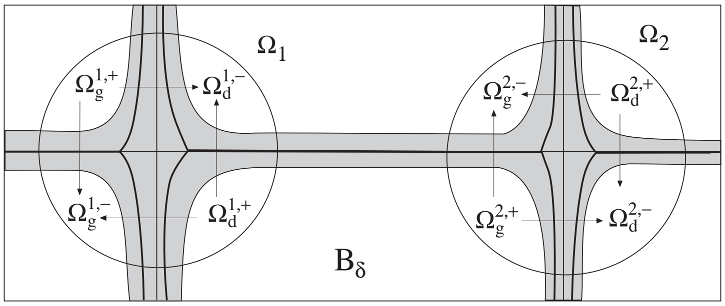

Figure 6: Les domaines $\Omega_{d,g}^{j,\pm}$

On fixe ensuite quatre points de base $x_{d,g}^{2,\pm}$ dans ces domaines de sorte que $x_{d,g}^{2,-} = \overline{(x_{d,g}^{2,+})}$ et l'on note (cf. Appendice A)

$$\begin{cases} w_d^{2,\pm} = w_\pm(\beta_2, x_d^{2,\pm}; x, h) \\ w_g^{2,\pm} = w_\pm(\alpha_2, x_g^{2,\pm}; x, h) \end{cases}$$

les solutions BKW exactes correspondantes. Grâce à notre choix de notation pour les domaines $\Omega_{d,g}^{2,\pm}$, on voit que les solutions $w_{d,g}^{2,\pm}$ sont définies en tant que développements asymptotiques au moins jusqu'au bord de Φ dans les domaines $\Omega_{d,g}^{2,\pm}$.

En considérant les fonctions $w_{d,g}^{2,\pm}$ comme solutions holomorphes dans $\mathcal{S}$ de l'équation (3.1), c'est à dire en oubliant leur domaines de définition en tant que solutions BKW exactes, on définit la matrice de transition M_2 près de o_2 par

$$\begin{pmatrix} w_g^{2,+} \\ w_g^{2,-} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} w_d^{2,+} \\ w_d^{2,-} \end{pmatrix}$$

Puisque l'on a $(w_{d,g}^{2,+})^* = i w_{d,g}^{2,-}$ où $f(x,\mu)^* = \overline{f(\overline{x}, \overline{\mu})}$, on a

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_2(\mu,h) & b_2(\mu,h) \\ b_2^*(\mu,h) & a_2^*(\mu,h) \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Les solutions étant holomorphes en μ dans un petit voisinage de l'origine, il est clair que cette relation est encore vraie pour tout μ dans $\hat{D}(R)$. Il est cependant essentiel de remarquer qu'il ne suffit pas de calculer

$$a_2 = \frac{\mathcal{W}(w_g^{2,+}, w_d^{2,-})}{\mathcal{W}(w_d^{2,+}, w_d^{2,-})} \qquad b_2 = \frac{\mathcal{W}(w_g^{2,+}, w_d^{2,+})}{\mathcal{W}(w_d^{2,-}, w_d^{2,+})}$$

puisque les développements asymptotiques en h de $a_2^*(E,h)$ et $b_2^*(E,h)$ ne se déduisent pas nécessairement de ceux de $a_2(E,h)$ et $b_2(E,h)$, le domaine de validité en E de ces derniers n'étant pas forcément symétriques par rapport à l'axe réel. De plus on ne connait pas toujours le terme dominant du développement asymptotique des wronskiens ci-dessus (cf. Remarque A.5). On utilisera donc également les formules

$$a_2^* = \frac{\mathcal{W}(w_g^{2,-}, w_d^{2,+})}{\mathcal{W}(w_d^{2,-}, w_d^{2,+})} \qquad b_2^* = \frac{\mathcal{W}(w_g^{2,-}, w_d^{2,-})}{\mathcal{W}(w_d^{2,+}, w_d^{2,-})}$$

et l'on commence par déterminer les domaines du plan des μ dans lesquels on peut obtenir ces développements asymptotiques (cf. Remarque A.5). Les différentes configurations des lignes de Stokes dans Ω_2 lorsque μ tourne autour de $\mu = 0$ dans le sens trigonométrique sont présentées dans la Figure 7. Les points tournants (proches de $o_2 \pm \sqrt{\mu/k_2}$) décrivent également un cercle autour de o_2 dans le même sens et les lignes de Stokes bougent continuement avec μ tout en restant proche de Φ_0.

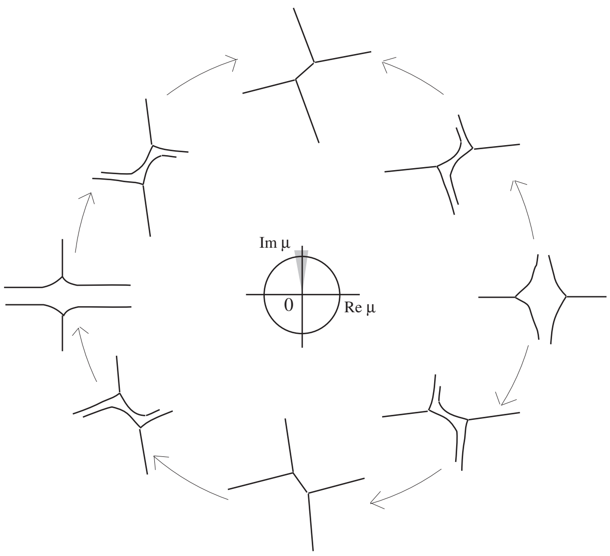

Figure 7: Lignes de Stokes près d'un sommet

On voit d'abord qu'il existe toujours un chemin transverse aux lignes de Stokes qui joint une région de type + à une région de type -. On pourra donc calculer le développement asymptotique de tous les wronskiens de la forme $\mathcal{W}(w^{2,+}, w^{2,-})$, et ce quelque soit la valeur de μ. En ce qui concerne les wronskiens de deux solutions de même type, c'est à dire $\mathcal{W}(w_g^{2,+}, w_d^{2,+})$ et $\mathcal{W}(w_g^{2,-}, w_d^{2,-})$, il y a trois configurations différentes:

- Aucune ligne de Stokes ne joint les points tournants. Il existe alors toujours un chemin qui traverse la coupure tout en restant transverse aux lignes de Stokes. Par exemple les chemins qui joignent $x_g^{2,+}$ et $x_d^{2,+}$ et qui sont transverses aux lignes de Stokes passent nécessairement entre α_2 et β_2. Si l'on écrit $w_g^{2,+}$ avec la détermination de $(\mu - k(x)^2)^{1/2}$ et $(\mu - k(x)^2)^{1/4}$ prolongée de $x_d^{2,+}$ à $x_g^{2,+}$ le long de ce chemin, on a

$$w_g^{2,+}(x) = iw_-(x, E, h; \alpha_2, x_g^{2,+})$$

  Nous obtiendrons un wronskien de deux solutions BKW de types différents et donc son développement asymptotique (cf. Remarque A.5).

- La configuration 1-bosse résonante: une ligne de Stokes joint les points tournants et $\operatorname{Im}\mu > 0$. Dans ce cas il n'existe pas de chemin qui traverse la coupure tout en étant transverse aux lignes de Stokes: le calcul du wronskien de $w_g^{2,+}$ et $w_d^{2,+}$ se fera donc avec les mêmes déterminations et on n'obtiendra qu'une majoration de $\mathcal{W}(w_g^{2,+}, w_d^{2,+})$.

- La configuration 1-bosse antirésonante: une ligne de Stokes joint les points tournants et $\operatorname{Im}\mu < 0$. Il n'existe à nouveau pas de chemin qui traverse la coupure tout en étant transverse aux lignes de Stokes: on n'obtiendra encore qu'une majoration de $\mathcal{W}(w_g^{2,-}, w_d^{2,-})$.

On voit donc que le développement asymptotique de $a_2(\mu, h)$ et $a_2^*(\mu, h)$ peut être calculé dans tout le disque pointé $\hat{D}(R) = \{\mu \in \mathbb{C}, 0 < |\mu| < R\}$. Par contre le calcul de celui de $b_2(\mu, h)$ n'est pas possible dans la configuration 1-bosse résonante et l'on est contraint de se restreindre à $\mu \in \hat{D}(R, [-(3\pi/2-\delta), \pi/2-\delta])$ qui ne rencontre pas la courbe 1-bosse résonante pour δ et R assez petits: en effet on a $S_2(\mu) = \pi\mu/k_2 + O(\mu^2)$, donc la courbe 1-bosse résonante $\{\operatorname{Re} T_2(\mu) = 0; \operatorname{Im}\mu > 0\}$ est perpendiculaire à l'axe réel en $\mu = 0$. De la même manière le calcul du développement asymptotique de $b_2(\mu, h)^*$ n'est pas possible dans la configuration 1-bosse antirésonante et l'on est contraint de se restreindre à $\mu \in \hat{D}(R, [-(\pi/2 - \delta), 3\pi/2 - \delta])$.

On traite d'abord le cas où μ est fixé:

Proposition 3.1 *Soit $\mu \in D(R)$ un nombre complexe indépendant de h. On a*

$$M_2(\mu, h) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{S_2(\mu)/2h}(1 + \tilde{O}(h)) & b_2(\mu, h) \\ b_2^*(\mu, h) & \mathrm{e}^{S_2(\mu)/2h}(1 + \tilde{O}(h)) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} b_2(\mu,h) = & \mathrm{e}^{S_2(\mu)/2h}(i+\tilde{O}(h)) \\ & \textit{pour } \mu \in \hat{D}(R,[-(3\pi/2-\delta),\pi/2-\delta]) \\ b_2^*(\mu,h) = & \mathrm{e}^{S_2(\mu)/2h}(-i+\tilde{O}(h)) \\ & \textit{pour } \mu \in \hat{D}(R,[-(\pi/2-\delta),3\pi/2-\delta]) \end{cases}$$

où la notation $\tilde{O}(h^j)$ désigne un symbole analytique classique d'ordre j.

Preuve: On calcule d'abord le wronskien de $w_d^{2,+}$ et $w_d^{2,-}$ pour μ réel positif. On voit sur la Figure 6 que l'on peut trouver un chemin d'origine $x_d^{2,+}$ et d'extrémité $x_d^{2,-}$ pour lequel les conditions des Propositions A.1 et A.2 sont clairement satisfaites. L'examen de la Figure 9 montre que ces conditions sont en fait satisfaites pour ce même chemin uniformément en μ dans $D(R)$. De plus on a bien $\mathrm{Re}\, z_d^{2,-} > \mathrm{Re}\, z_d^{2,+}$, donc la Proposition A.4 donne

$$\mathcal{W}(w_d^{2,+},w_d^{2,-}) = -\frac{2}{h}W_P^+(z_d^{2,-};z_d^{2,+}) = -\frac{2}{h}(1+\tilde{O}(h))$$

uniformément en μ dans $D(R)$. Le même raisonnement donne successivement:

$$\mathcal{W}(w_g^{2,+},w_d^{2,-}) = -\frac{2}{h}e^{S_2(\mu)/2h}W_P^+(z_d^{2,-};z_g^{2,+}) = -\frac{2}{h}e^{S_2(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h))$$

et

$$\mathcal{W}(w_g^{2,-},w_d^{2,+}) = \frac{2}{h}e^{S_2(\mu)/2h}W_P^+(z_g^{2,-};z_d^{2,+}) = \frac{2}{h}e^{S_2(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h))$$

toujours uniformément en μ dans $D(R)$. De ces formules on tire en particulier $a_2(\mu,h) = e^{S_2(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h))$ et $a_2^*(\mu,h) = e^{S_2(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h))$.

Nous calculons maintenant le wronskien $\mathcal{W}(w_g^{2,+},w_d^{2,+})$ au point $x_d^{2,+}$ pour $\mu \in \hat{D}(R,[-(3\pi/2-\delta),\pi/2-\delta])$. Les chemins qui joignent $x_g^{2,+}$ et $x_d^{2,+}$ et qui sont transverses aux lignes de Stokes passent alors nécessairement entre α_2 et β_2. Pour μ réel positif et indépendant de h, les conditions des Propositions A.1 et A.4 sont satisfaites pour l'un quelconque de ces chemin. On a donc

$$w_g^{2,+}(x_d^{2,+}) = iw_-(x_d^{2,+},E,h;\alpha_2,x_g^{2,+})$$

et

$$\mathcal{W}(w_g^{2,+},w_d^{2,+}) = \frac{2i}{h}e^{S_2(\mu)/2h}W_P^+(z_g^{2,+};z_d^{2,+}) \tag{3.3}$$

ce qui donne bien

$$b_2(\mu,h) = ie^{S_2(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h)) \tag{3.4}$$

pour μ réel positif assez petit.

On peut alors vérifier que le chemin valable pour μ réel positif existe toujours lorsque μ devient complexe et que les lignes de Stokes se déforment, et que les conditions des Propositions A.1 et A.4 sont toujours satisfaites (cf. Figure 9).

On obtient $\mathcal{W}(w_g^{2,-}, w_d^{2,-})$ de la même manière, ce qui donne l'expression correspondante de $b_2^*(\mu, h)$. □

Dans le cas où μ tend vers 0 avec h, les points tournants $\alpha_2(\mu)$ et $\beta_2(\mu)$ pincent les chemins permettant de calculer $\mathcal{W}(w_g^{2,-}, w_d^{2,-})$ et $\mathcal{W}(w_g^{2,+}, w_d^{2,+})$. Les conditions de la Proposition A.1 sur la fonction H ne sont plus vérifiées le long de ce chemin puisque $H(z)$ est singulière en $z(\alpha_2)$ et $z(\beta_2)$, et il faut reprendre en détail sa preuve pour voir ce qui en subsiste dans ce cas.

On obtient alors la proposition suivante, dont nous avons placé la preuve à la fin de l'Appendice A pour éviter de devoir rappeler un grand nombre de notations.

Proposition 3.2 *Soit $\mu \in D(R)$ tel que $\mu \to 0$ quand $h \to 0$.*

$$M_2(\mu, h) = \begin{pmatrix} e^{S_2(\mu)/2h}(1 + \tilde{O}(h)) & b_2(\mu, h) \\ b_2^*(\mu, h) & e^{S_2(\mu)/2h}(1 + \tilde{O}(h)) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} b_2(\mu, h) = & e^{S_2(\mu)/2h}(i + O(\frac{h}{\mu})) \\ & \text{pour } \mu \in \hat{D}(R, [-(3\pi/2 - \delta), \pi/2 - \delta]) \backslash D(r_0 h) \\ b_2^*(\mu, h) = & e^{S_2(\mu)/2h}(-i + O(\frac{h}{\mu})) \\ & \text{pour } \mu \in \hat{D}(R, [-(\pi/2 - \delta), 3\pi/2 - \delta]) \backslash D(r_0 h) \end{cases}$$

Le calcul de la matrice de transition M_1 près de o_1 s'effectue de la même manière. On travaille dans un voisinage Ω_1 de o_1, et l'on désigne par $\Omega_{d,g}^{1,\pm}$ l'intersection de Ω_1 avec l'extérieur de Φ_0 dans B_δ (cf. Figure 6). Il est très important de noter que, contrairement à ce que nous avons vu pour o_2, la partie rélle de la phase $z(x)$ est une fonction croissante de $\mathrm{Im}\, x$ *à droite* de o_1, et décroissante de $\mathrm{Im}\, x$ *à gauche* de o_1 . Cette fois donc, c'est le développement asymptotique du wronskien de $w_g^{1,-}$ et $w_d^{1,-}$ que l'on ne peut calculer dans la configuration 1-bosse résonante, et celui de $w_g^{1,+}$ et $w_d^{1,+}$ dans la configuration 1-bosse anti-résonante. Notons aussi que la coupure pour $(\mu - k(x)^2)^{1/4}$ se place cette fois-ci à droite de la barrière et qu'on a

$$\mathcal{W}(w_d^{1,+}, w_d^{1,-}) = \frac{2}{h}(1 + \tilde{O}(h))$$

On obtient donc la

Proposition 3.3 *Pour tout $\mu \in D(R)$, on a*

$$M_1(\mu, h) = -\begin{pmatrix} e^{S_1(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h)) & b_1(\mu, h) \\ b_1^*(\mu, h) & e^{S_1(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h)) \end{pmatrix}$$

avec, lorsque μ est indépendant de h,

$$\begin{cases} b_1(\mu, h) = e^{S_1(\mu)/2h}(i+\tilde{O}(h)) & \text{pour } \mu \in \hat{D}(C, [-(\pi/2-\delta), 3\pi/2-\delta]) \\ b_1^*(\mu, h) = e^{S_1(\mu)/2h}(-i+\tilde{O}(h)) & \text{pour } \mu \in \hat{D}(C, [-(3\pi/2-\delta), \pi/2-\delta]) \end{cases}$$

et, lorsque μ tend vers 0 avec h,

$$\begin{cases} b_1(\mu, h) = e^{S_1(\mu)/2h}(i+O(\frac{h}{\mu})) & \text{pour } \mu \in \hat{D}(C, [-(\pi/2-\delta), 3\pi/2-\delta]) \\ b_1^*(\mu, h) = e^{S_1(\mu)/2h}(-i+O(\frac{h}{\mu})) & \text{pour } \mu \in \hat{D}(C, [-(3\pi/2-\delta), \pi/2-\delta]) \end{cases}$$

Remarque 3.4 Dans la zone $\mu \in \hat{D}(R; [-(\pi/2-\delta), (\pi/2-\delta)])$ où les développements asymptotiques de b_j, b_j^* sont valables simultanément, la matrice de transition s'écrit

$$M_j = (-1)^j e^{S_j(\mu)/2h} \begin{pmatrix} 1+\tilde{O}(h) & i+\tilde{O}(h) \\ -i+\tilde{O}(h) & 1+\tilde{O}(h) \end{pmatrix} \qquad (j = 1, 2)$$

et l'on a donc

$$\det M_j = e^{S_j(\mu)/h} d(\mu, h)$$

où $d(\mu, h) = \tilde{O}(h)$. D'autre part, on a a priori

$$\det M_j = \frac{\mathcal{W}(w_g^{j,+}, w_g^{j,-})}{\mathcal{W}(w_d^{j,+}, w_d^{j,-})} = -1 + \tilde{O}(h)$$

Puisque $\operatorname{Re} S_j(\mu) > 0$ sur $\hat{D}(R; [-(\pi/2-\delta), (\pi/2-\delta)])$, on déduit que $d(\mu, h)$ est exponentiellement petit.

3.2 Régime critique

Dans le cas où $h/|\mu|$ devient grand quand h tend vers 0, on n'a plus d'estimation utilisable pour les différents wronskiens (cf. Propositions 3.2 et 3.3). Cependant en utilisant un résultat du à B.Helffer et J.Sjöstrand, on peut ramener *microlocalement* l'opérateur $\tilde{P}(x, hD) = P(x, hD) - V_0 = h^2 D^2 - k^2(x)$, dont le symbole au voisinage de chacun des maximums est $\tilde{p}(x, \xi) = p(x, \xi) - V_0 = \xi^2 - k_j^2(x - o_j)^2 + O((x - o_j)^3)$, à l'opérateur Q_0 donné par

$$Q_0(x, hD) = \frac{1}{2}(xhD + hDx)$$

dont le symbole principal est $q_0(x,\xi) = x\xi$. Rappelons que les solutions de l'équation $\tilde{P}u + \mu u = 0$ sont, pour $\mu = O(h)$, microlocalement supportées par la courbe d'énergie critique $\tilde{p}^{-1}(0) = p^{-1}(V_0)$ que nous avons représentée dans la Figure 8.

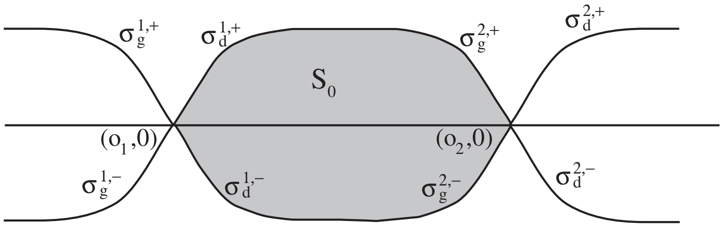

Figure 8: La courbe d'énergie critique.

Ces solutions peuvent s'écrire à partir de celles de l'équation $Q_0 u = \nu' u = 0$, où ν' est une fonction de μ et de h, qui s'obtiennent facilement. On récupère ainsi des solutions microlocales $u^{j,\pm}$ et $v^{j,\pm}$ de $\tilde{P}u + \mu u = 0$, définies près de $(o_j, 0)$ pour $j = 1, 2$, qui permettent de recoller les huit solutions BKW $w^{j,\pm}_{d,g}$. Nous avons rappelé l'essentiel de ces constructions en appendice, et le lecteur trouvera tous les détails dans [Ra].

Comme dans la section précédente nous traitons d'abord le cas de o_2. Nous noterons $u^2_\pm$ et $v^2_\pm$ les solutions microlocales définies près de o_2 comme dans l'Appendice C. Les caractéristiques de l'opérateur P sont simples en dehors de $(o_1, 0)$ et $(o_2, 0)$; il y a donc unicité des solutions le long de $\sigma^{2,\pm}_{d,g}$. Nous avons alors le

Lemme 3.5 *Soit $\mu \in D(rh)\backslash\Gamma_2(h)$. Il existe deux fonctions $g_2(\mu, h)$, $d_2(\mu, h)$ telles que, microlocalement près de $\sigma^{2,-}_g$ et $\sigma^{2,+}_d$ respectivement,*

$$w^{2,+}_g(x, E, h; \alpha_2(E)) = g_2(\mu, h)u^2_-(x, \mu, h)$$
$$w^{2,+}_d(x, E, h; \beta_2(E))) = d_2(\mu, h)u^2_+(x, \mu, h)$$

De plus on a

$$g_2(\mu, h) = (\frac{e^{3i\pi/8}}{\sqrt{k_2}} + \tilde{O}(h)) \exp\{\frac{i}{4\pi h} S_2(\mu)(\log \frac{S_2(\mu)}{2\pi k_2} - 1)\}$$

$$d_2(\mu, h) = (\frac{e^{-i\pi/8}}{\sqrt{k_2}} + \tilde{O}(h)) \exp\{\frac{i}{4\pi h} S_2(\mu)(\log \frac{S_2(\mu)}{2\pi k_2} - 1)\}$$

où $\tilde{O}(h)$ désigne un symbole analytique classique d'ordre 1.

Preuve: Seule la deuxième partie du lemme reste à prouver, et on n'écrit la preuve que pour $w^{2,-}_g$, le cas de $w^{2,+}_d$ pouvant être traité de la même manière.

Rappelons que (cf. Appendice A)

$$\begin{aligned} w_g^{2,-}(x,E) &= (V(x)-E)^{-1/4}\,\mathrm{e}^{-z(x,E,\alpha_2(\mu))/h}(1+O(h)) \\ &= (\mu-k(x)^2)^{-1/4}\,\mathrm{e}^{-z(x,E,\alpha_2(\mu))/h}(1+O(h)) \end{aligned}$$

et que, microlocalement près de $\sigma_g^{2,-}$ (cf. Proposition C.6),

$$u_-^2(x,\mu) = \frac{\mathrm{e}^{-i\pi/8}}{|y_c(x,\mu)|^{1/2}}\,\mathrm{e}^{i\phi_-(x,\mu)/\hbar_2}(1+O(x))(1+O(\hbar_2))$$

où $\hbar_2 = h/k_2$ (cf. Appendice C). En rapprochant ces deux expressions on obtient directement la phase de $g_2(\mu,h)$, et le symbole principal en écrivant leur développements par rapport à x quand $x \to 0$. □

On revient au calcul de la matrice de transition M_2. On note d'abord, pour $\mu \notin \Gamma_2(h)$

$$B(\hbar_2,\nu_2') = \begin{pmatrix} p_2 & q_2 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

la *matrice de branchement* ou matrice de passage de la base (v_+^2, v_-^2) à la base (u_+^2, u_-^2). On a par la Proposition C.2,

$$p_2 = \exp\{i(\frac{\pi}{4} + \frac{S_2(\mu)}{2\pi h}\log\frac{S_2(\mu)}{2\pi k_2 e})\}N(i\frac{S_2(\mu)}{2\pi h})^{-1}\exp(-\frac{S_2(\mu)}{2h})$$

$$q_2 = \exp\{i(-\frac{\pi}{4} + \frac{S_2(\mu)}{2\pi h}\log\frac{S_2(\mu)}{2\pi k_2 e})\}N(i\frac{S_2(\mu)}{2\pi h})^{-1}$$

où la fonction $N(z)$ est définie dans l'introduction (cf. (0.2)). On rappelle que $\nu_2' \sim -\mu/2(k_2)^2$. Alors M_2 s'exprime au moyen de g_2, d_2, p_2 et q_2:

Lemme 3.6 *Pour $\mu \notin (\Gamma_2(h) \cup \bar{\Gamma}_2(h))$ et microlocalement près de $(o_2, 0)$ on a:*

$$M_2 = \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & -ig_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_2/p_2 & 1/p_2 \\ 1/p_2^* & q_2^*/p_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/d_2 & 0 \\ 0 & i/d_2^* \end{pmatrix}$$

Preuve: On écrit d'abord $M_2 = M'M''$, où M' et M'' sont les matrices définies par

$$\begin{pmatrix} w_g^{2,+} \\ w_g^{2,-} \end{pmatrix} = M'\begin{pmatrix} u_+^2 \\ u_-^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} u_+^2 \\ u_-^2 \end{pmatrix} = M''\begin{pmatrix} w_d^{2,+} \\ w_d^{2,-} \end{pmatrix}$$

Nous allons démontrer que

$$M' = \begin{pmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_2/p_2 & 1 \\ 1/p_2^* & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M'' = \begin{pmatrix} 1 & q_2^* \\ 0 & p_2^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/d_2 & 0 \\ 0 & 1/d_2^* \end{pmatrix}$$

ce qui donnera la proposition car, puisque $p_2p_2^*+q_2q_2^*=1$,

$$\begin{pmatrix} q_2/p_2 & 1 \\ 1/p_2^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & q_2^* \\ 0 & p_2^* \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_2/p_2 & 1/p_2 \\ 1/p_2^* & q_2^*/p_2^* \end{pmatrix}$$

On calcule d'abord M', que l'on note

$$M'=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

Puisque l'on a $(w_g^{2,+})^*=iw_g^{2,-}$, $(u_+^2)^*=v_-^2$, et $(u_-^2)^*=v_+^2$, la matrice M' donne une expression pour $w_g^{2,-}$ dans chacune des bases (u_+^2,u_-^2) et (v_+^2,v_-^2):

$$\begin{aligned} w_g^{2,+} &= a'u_2^+ + b'u_2^-, \\ &= -id'^*v_2^+ - ic'^*v_2^- \end{aligned}$$

La première expression donne $d'=g_2$ puisque u_2^+ est microlocalement nulle près de $\sigma_g^{2,-}$ (cf. la discussion après la Proposition C.3). De la même manière, la deuxième égalité donne $(d')^*=0$ puisque $w_g^{2,+}$ et v_2^- sont microlocalement nulles près de $\sigma_g^{2,+}$. On calcule alors a' et c' grâce à la relation

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}=-iB(\hbar_2,\nu_2)\begin{pmatrix} (d')^* \\ (c')^* \end{pmatrix}$$

Le calcul de M'' s'effectue de la même manière. $\square$

A partir de ce lemme, on obtient facilement le développement asymptotique des coefficients de la matrice M_2.

Proposition 3.7 *Pour tout μ dans $D(rh)$, on a*

$$M_2(\mu,h)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{S_2(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h)) & b_2(\mu,h) \\ b_2^*(\mu,h) & \mathrm{e}^{S_2(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h)) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} b_2(\mu,h)= & iN(i\frac{S_2(\mu)}{2\pi h})e^{S_2(\mu)/2h}(1+O(h\log h))+O(e^{-\epsilon/h}) \\ & \textit{pour } \mu\notin\Gamma_2(h) \\ b_2^*(\mu,h)= & -iN(-i\frac{S_2(\mu)}{2\pi h})e^{S_2(\mu)/2h}(1+O(h\log h))+O(e^{-\epsilon/h}) \\ & \textit{pour } \mu\notin\bar{\Gamma}_2(h) \end{cases}$$

On peut effectuer le calcul de la matrice M_1 exactement de la même manière et, avec les mêmes notations, on obtient la

Proposition 3.8 *Pour tout μ dans $D(rh)$, on a*

$$M_1(\mu,h) = -\begin{pmatrix} e^{S_1(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h)) & b_1(\mu,h) \\ b_1^*(\mu,h) & e^{S_1(\mu)/2h}(1+\tilde{O}(h)) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} b_1(\mu,h) = & iN(-i\frac{S_1(\mu)}{2\pi h})e^{S_1(\mu)/2h}(1+O(h\log h)) + O(e^{-\epsilon/h}) \\ & \text{pour } \mu \notin \bar{\Gamma}_1(\mu) \\ b_1^*(\mu,h) = & -iN(i\frac{S_1(\mu)}{2\pi h})e^{S_1(\mu)/2h}(1+O(h\log h)) + O(e^{-\epsilon/h}) \\ & \text{pour } \mu \notin \Gamma_1(\mu) \end{cases}$$

3.3 Problème global

Nous revenons maintenant à la situation globale. Pour calculer $\mathbb{T}$, il nous reste à recoller $(w_g^{1,+}, w_g^{1,-})$ avec (f_g^+, f_g^-) , $(w_d^{2,+}, w_d^{2,-})$ avec (f_d^+, f_d^-) d'une part, et $(w_d^{1,+}, w_d^{1,-})$ et $(w_g^{2,+}, w_g^{2,-})$ d'autre part. On utilise d'abord les relations suivantes (cf. Appendice B):

$$\begin{pmatrix} f_g^+ \\ f_g^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_g^+ & 0 \\ 0 & r_g^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_g^{1,+} \\ w_g^{1,-} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_d^+ \\ f_d^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_d^+ & 0 \\ 0 & r_d^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_d^{2,+} \\ w_d^{2,-} \end{pmatrix}$$

avec

$$r_g^\pm = e^{-i\pi/4}E^{1/4}e^{\mp S_g/2h}(1+\tilde{O}(h)) \quad \text{et} \quad r_d^\pm = e^{i\pi/4}E^{1/4}e^{\mp S_d/2h}(1+\tilde{O}(h))$$

lorsque $\arg(E) = 0$, puis le

Lemme 3.9

$$\begin{pmatrix} w_d^{1,+} \\ w_d^{1,-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-\tilde{S}(\mu)/2h) & 0 \\ 0 & \exp(\tilde{S}(\mu)/2h) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_g^{2,+} \\ w_g^{2,-} \end{pmatrix}$$

Preuve: La phase de $w_d^{1,\pm}$ est normalisée en β_1 et celle de $w_g^{2,\pm}$ en α_2 et c'est la seule différence entre ces deux solutions BKW exactes. On a donc

$$w_d^{1,\pm} = w_g^{2,\pm} \exp(\pm\frac{1}{h}\int_{\beta_1}^{\alpha_2}(V(x)-E)^{1/2}dx)$$

Il suffit alors de voir (cf. Figure 3) que $\displaystyle\int_{\beta_1}^{\alpha_2}(V(x)-E)^{1/2}dx = -\frac{1}{2}\tilde{S}(\mu)$. □

Nous sommes enfin prêts à calculer $\mathbb{T}$:

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} r_g^+ & 0 \\ 0 & r_g^- \end{pmatrix} M_1 \begin{pmatrix} e^{-\tilde{S}(\mu)/2h} & 0 \\ 0 & e^{\tilde{S}(\mu)/2h} \end{pmatrix} M_2 \begin{pmatrix} r_d^+ & 0 \\ 0 & r_d^- \end{pmatrix}^{-1}$$

Avec les notations introduites plus haut, on obtient

$$\begin{aligned} t &= \frac{r_g^+}{r_d^+}(a_1 a_2 e^{-\tilde{S}(\mu)/2h} + b_1 b_2^* e^{\tilde{S}(\mu)/2h}) \\ r &= \frac{r_g^+}{r_d^-}(a_1 b_2 e^{-\tilde{S}(\mu)/2h} + b_1 a_2^* e^{\tilde{S}(\mu)/2h}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

et aussi

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{r_g^-}{r_d^-}(a_1^* a_2^* e^{\tilde{S}(\mu)/2h} + b_1^* b_2 e^{-\tilde{S}(\mu)/2h}) \\ r^* &= \frac{r_g^-}{r_d^+}(a_1^* b_2^* e^{\tilde{S}(\mu)/2h} + b_1^* a_2 e^{-\tilde{S}(\mu)/2h}) \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nous calculons ici les développements asymptotiques de s_{11} et s_{12}. Puisque $s_{11} = 1/t^*$, $s_{12} = -r^*/t^*$ (cf. 1.1), il suffit de calculer t^* et r^*. Il est important de noter que par la méthode BKW on peut calculer t^* pour $\arg\mu \in]-3\pi/2+\delta, \pi/2[$ alors que le calcul de r^* n'est possible que pour $\arg\mu \in]-\pi/2+\delta, \pi/2[$. En effet t^* dépend de b_1^* et b_2 dont les développements asymptotiques sont valables pour $\arg\mu \in]-3\pi/2+\delta, \pi/2[$ alors que r^* dépend de b_1^* et b_2^* dont les développements ne sont connus simultanément que pour $\arg\mu \in]-\pi/2+\delta, \pi/2[$. Le même problème se pose pour la méthode microlocale. Nous avons alors

$$\begin{aligned} t^* &= -e^{-S_\infty(\mu)/2h}(1 + e^{-\tilde{S}(\mu)/h})(1 + O(h)) \\ &\qquad \text{pour} \quad \mu \in \hat{D}(R;]-3\pi/2+\delta, \pi/2-\delta[) \backslash D(rh) \\ &= -e^{-S_\infty(\mu)/2h}(1 + N(i\frac{S_1(\mu)}{2\pi h})N(i\frac{S_2(\mu)}{2\pi h})e^{-\tilde{S}(\mu)/h})(1 + O(h\log h)) \\ &\qquad \text{pour} \quad \mu \in D(rh) \backslash (\Gamma_1(h) \cup \Gamma_2(h)) \\ r^* &= ie^{-(S_\infty(\mu)+2S_d(\mu))/2h}(1 + e^{-\tilde{S}(\mu)/h})(1 + O(h)) \\ &\qquad \text{pour} \quad \mu \in \hat{D}(R;]-\pi/2+\delta, \pi/2-\delta[) \backslash D(rh) \\ &= ie^{-(S_\infty(\mu)+2S_d(\mu))/2h}(N(-i\frac{S_2(\mu)}{2\pi h}) + e^{-\tilde{S}(\mu)/h}N(i\frac{S_1(\mu)}{2\pi h}))(1 + O(h\log h)) \\ &\qquad \text{pour} \quad \mu \in D(rh) \backslash (\Gamma_1(h) \cup \bar{\Gamma}_2(h)) \end{aligned}$$

On déduit alors facilement de ces expressions les Théorèmes 0.3 et 0.6. Le Corollaire 0.5 en est une conséquence immédiate.

4 Résonances

Rappelons que les résonances sont les zeros de t^*. On obtient donc des conditions de quantification pour les résonances immédiatement à partir des Théorèmes 0.3 et 0.6. En regardant les expressions de s_{11}, on obtient

$$\tilde{S}(\mu) = (2n+1)\pi ih + a(\mu, h) \tag{4.1}$$

pour $\mu \in \hat{D}(R;]-3\pi/2+\delta, \pi/2-\delta[) \backslash D(rh)$ où $a(\mu, h) = O(h^2)$ uniformément dans cette zone et

$$\tilde{S}(\mu) - h \sum_{j=1,2} \log N(i \frac{S_j(\mu)}{2\pi h}) = (2n+1)\pi ih + b(\mu, h) \tag{4.2}$$

pour $\mu \in D(rh) \backslash (\Gamma_1(h) \cup \Gamma_2(h))$ où $b(\mu, h) = O(h^2 \log h)$ uniformément dans cette zone. Nous allons étudier maintenant l'existence et la répartition des résonances dans chacune des deux zones à partir de ces règles de quantification.

4.1 Résonances loin du sommet

Soit

$$F(\mu, n, h) = \tilde{S}(\mu) - (2n+1)\pi ih$$

D'après la Proposition 2.6, on a immédiatement la

Proposition 4.1 *L'équation $F(\mu, n, h) = 0$ admet dans $\hat{D}(R,]-3\pi/2+\delta, \pi/2-\delta[)$ une unique solution $\tilde{\mu}_n(h)$ si $R > 0$, $h > 0$ et $(2n+1)\pi h - S_0$ sont assez petits. De plus, $\tilde{\mu}_n(h) \in B_{ext,int}$ si $\pm\{(2n+1)\pi h - S_0\} > 0$, $\tilde{\mu}_n(h) = 0$ si $(2n+1)\pi h - S_0 = 0$ et $\mathrm{Re}\, \tilde{\mu}_n(h) < \mathrm{Re}\, \tilde{\mu}_{n+1}(h)$.*

Soit $C_n(h)$ le cercle de centre $\tilde{\mu}_n(h)$ et de rayon $r_n(h) > 0$. Si R est assez petit, on voit par le Lemme 2.1 que $|\tilde{S}'(\mu)|$ est minorée par une constante positive C indépendante de h pour μ dans $\hat{D}(R,]-3\pi/2+\delta, \pi/2-\delta[) \backslash D(r_0 h)$. On utilise alors le théorème de Koebe (cf. [Po], Theorem 1.6):

Lemme 4.2 *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe et univalente dans $|z| < R$ telle que $f(0) = 0$. Alors on a*

$$|f(z)| \geq \frac{R^2 r}{(R+r)^2} |f'(o)| \qquad \textit{pour} \qquad |z| = r < R$$

L'égalité est achevée si et seulement si $f(z) = C^{st} R^2 z/(R-z)^2$. En particulier, si $f(z)$ est continue sur $|z| \leq R$, alors

$$|f(z)| \geq \frac{R}{4} |f'(o)| \qquad \textit{pour} \qquad |z| = R$$

On obtient donc en utilisant la Proposition 2.6

$$\begin{aligned}|F(\mu,n,h)| &= |\tilde{S}(\mu)-\tilde{S}(\tilde{\mu}_n(h))| \\ &\geq C|\mu-\tilde{\mu}_n(h)|\end{aligned}$$

Si l'on prend $|\mu-\tilde{\mu}_n(h)| = C_1 h^{2-\epsilon}$ pour $C_1>0$, $\epsilon>0$, alors pour tout h assez petit on a $Cr_n(h) \geq |a(\mu,h)|$ et le théorème de Rouché donne le Théorème 0.5 pour ce qui concerne la zone $\hat{D}(R,]-3\pi/2+\delta,\pi/2-\delta[)\backslash D(r_0h)$.

4.2 Résonances proches du sommet

La condition de quantification dans la zone $D(rh)\backslash(\Gamma_1(h)\cup\Gamma_2(h))$ est

$$\tilde{S}(\mu) - h\sum_{j=1,2}\log N(i\frac{S_j(\mu)}{2\pi h}) = (2n+1)\pi ih + b(\mu,h)$$

où $b(\mu,h)=O(h^2\log h)$. La définition de $N(z)$ (cf. (0.2)) donne

$$\begin{aligned}&\tilde{S}(\mu) - \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1,2}S_j(\mu)\log(i\frac{S_j(\mu)}{2\pi he}) - h\sum_{j=1,2}\log\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{S_j(\mu)}{2\pi h})} \\ &= (2n+1)\pi ih + b(\mu,h)\end{aligned}$$

On écrit alors le deuxième terme du membre gauche sous la forme

$$\begin{aligned}&-\frac{i}{2\pi}\sum_{j=1,2}S_j(\mu)\log(i\frac{S_j(\mu)}{2\pi he}) \\ &= \frac{1}{2\pi i}(S_1(\mu)+S_2(\mu))\log\mu - \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1,2}S_j(\mu)\log(i\frac{S_j(\mu)}{2\pi he\mu})\end{aligned}$$

et on obtient avec le Lemme 2.1

$$\begin{aligned}&S_0 + K\mu\log h \\ &= (2n+1)\pi h + \tilde{K}\mu - ih\textstyle\sum_{j=1,2}\log\dfrac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+i\frac{S_j(\mu)}{2\pi h})} + b_1(\mu,h)\end{aligned} \tag{4.3}$$

où $b_1(\mu,h)=O(h^2\log h)$ est une fonction analytique de μ, et

$$K = (1/k_1+1/k_2)/2 \qquad \tilde{K} = \frac{i\pi}{2}K - \sum_{j=1,2}\frac{1}{2k_j}\log(2ek_j)$$

puisque, μ étant d'ordre h,

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1,2}S_j(\mu)\log(i\frac{S_j(\mu)}{2\pi he\mu}) = K\mu\log h - \tilde{K}\mu + O(h^2)$$

On a d'abord facilement le

Lemme 4.3 *Si $\mu \notin \Gamma_1(h) \cup \Gamma_2(h)$ est une solution de (4.3) alors*

$$(i) \quad \mu \neq o(\frac{h}{\log h}) \qquad\qquad (ii) \quad \operatorname{Im}\mu = O(h/\log h)$$

Preuve: Si $\mu = o(h/\log h)$, alors

$$\log \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{S_j(\mu)}{2\pi h})} = \frac{1}{2}\log 2 + o(\frac{1}{\log h})$$

car $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, ce qui nous amène à la contradiction

$$S_0 - (2n+1)\pi h + ih\log 2 = o(h)$$

c'est-à-dire en prenant la partie imaginaire, $h\log 2 = o(h)$.

Supposons maintenant que μ vérifie (4.3) avec $\operatorname{Im}\mu \neq O(h/\log h)$. En divisant par h les deux membres de (4.3) et en prenant la partie imaginaire, on obtient

$$K\operatorname{Im}\mu\frac{\log h}{h} = \frac{K\pi\operatorname{Im}\mu}{2h} - \operatorname{Re}\sum_{j=1,2}\log\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\frac{S_j(\mu)}{2\pi h})} + \frac{\operatorname{Im} b_1(\mu,h)}{h}$$

Or le membre de droite est borné pour tout $\mu \in D(rh)\backslash(\Gamma_1(h)\cup\Gamma_2(h))$ alors que le membre de gauche tend vers l'infini quand h tend vers 0. $\square$

Supposons maintenant que $\operatorname{Re}\mu = O(h/\log h)$. L'équation (4.3) devient

$$S_0 + K\mu\log h - (2n+1)\pi h + ih\log 2 = b_2(\mu,h) \tag{4.4}$$

où $b_2(\mu,h) = O(h/\log h)$ est une fonction analytique de μ. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'équation (4.4) sans second membre possède une unique solution

$$\tilde{\mu}_n(h) = \frac{(2n+1)\pi h - S_0 - ih\log 2}{K\log h}$$

dans $D(rh)$ à condition que h appartienne à un certain intervalle $]h_n^-, h_n^+[\subset]0, h_0]$. Le théorème de Rouché permet de conclure à l'existence d'une unique résonance $\mu_n(h)$ telle que pour $h \in]h_n^-, h_n^+[$,

$$\mu_n(h) = \frac{(2n+1)\pi h - S_0 - ih\log 2}{K\log h} + O(\frac{h}{(\log h)^2})$$

Il reste à étudier le cas où $\mathrm{Re}\,\mu \neq O(h/\log h)$. L'équation (4.3) devient

$$S_0 + K\mu \log h - (2n+1)\pi h = b_3(\mu, h) \tag{4.5}$$

où $b_3(\mu, h) = O(h)$ est une fonction analytique de μ. On résout l'équation (4.5) sans second membre et on obtient par le théorème de Rouché une unique résonance

$$\mu_n(h) = \frac{(2n+1)\pi h - S_0}{K \log h} + O(\frac{h}{\log h})$$

dans $D(rh)$ à condition que h appartienne à un certain intervalle $]h_n^-, h_n^+[\subset]0, h_0]$. Ceci achève la preuve du Théorème 0.7.

A Solutions BKW exactes

Nous rappelons les principaux éléments de la méthode BKW exacte (cf.[Gr],[Ge-Gr],[Ra]...) qui permet de construire des solutions de l'équation de Schrödinger

$$h^2 D^2 u + V(x)u = Eu \tag{A.1}$$

tout en donnant leur développement asymptotique en h. Soit Ω un domaine dans $\mathbb{C}$ et $V(x)$ une fonction holomorphe dans Ω. On introduit le changement de variables

$$z(x; x_0) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{V(x) - E}\, dt$$

où x_0 est un point fixé de Ω. Si Ω_1 est un ouvert simplement connexe de Ω sur lequel $V(x) - E$ ne s'annule pas, l'application z est bijective de Ω_1 dans $z(\Omega_1)$ pour une détermination donnée de $(V(x) - E)^{1/2}$. On pose ensuite

$$u(x) = (V(x) - E)^{-1/4} e^{\pm z(x)/h} W_{\pm}(z(x))$$

et l'équation (A.1) devient

$$W_{\pm}'' \pm \frac{2}{h} W_{\pm}' - (H^2 - H')W_{\pm} = 0 \tag{A.2}$$

où $'$ désigne d/dz et $H(z(x)) = -\frac{1}{4}(V(x) - E)^{-3/2} dV(x)/dx$. Notons au passage que si x_0 est un point tournant simple, $H(z)$ admet un pôle simple en $z_0 = z(x_0)$:

$$H(z) = -\frac{1}{6}\frac{1}{z - z_0}(1 + g((z - z_0)^{3/2})) \tag{A.3}$$

où g est une fonction holomorphe telle que $g(0) = 0$.

On fixe alors un point $z_1 = z(x_1)$, $x_1 \in \Omega_1$ et on définit une suite de fonctions $W_{n,\pm}(z; z_1)$ par les équations récurentes:

$$\begin{cases} W_{0,\pm} = 1 & \\ W_{p,\pm}(z_1) = 0 & \text{pour } p \geq 1 \\ (\partial_z \pm \frac{2}{h}) W_{2p+1,\pm} = -HW_{2p,\pm} & \text{pour } p \geq 0 \\ \partial_z W_{2p,\pm} = -HW_{2p-1,\pm} & \text{pour } p \geq 1 \end{cases} \tag{A.4}$$

Chaque fonction $W_{n,\pm}(z)$ est holomorphe sur $z(\Omega_1)$ et la somme $W_\pm(z; z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} W_{n,\pm}(z; z_1)$ vérifie formellement l'équation $(A.2)_\pm$. Revenant à la variable x on pose enfin,

$$w_\pm(x, E, h; x_0, x_1) = (V(x) - E)^{-1/4} e^{\pm z(x, x_0, E)/h} W_\pm(z(x; x_0); z(x_1; x_0))$$

Proposition A.1 *Les séries $\sum_{n=0}^{\infty} W_{n,\pm}(z; z_1)$ convergent uniformément sur chaque compact de $z(\Omega_1)$, et leurs sommes $W_\pm(z; z_1)$ sont des fonctions holomorphes sur $z(\Omega_1)$.*

Preuve: Le système (A.4) s'écrit sous forme intégrale

$$\begin{cases} W_{0,\pm} = 1 \\ W_{2p+1,\pm} = -I_\pm(W_{2p,\pm}, h) \\ W_{2p,\pm} = -J(W_{2p-1,\pm}) \end{cases} \tag{A.5}$$

où l'on a noté I et J les opérateurs définis par

$$\begin{cases} I_\pm(f, h) = \int_{z_1}^{z} e^{\pm 2(t-z)/h} (Hf)(t) dt \\ J(f) = \int_{z_1}^{z} (Hf)(t) dt \end{cases}$$

Alors pour chaque compact $K \in z(\Omega_1)$ contenant z_1 on a

$$|W_{n,\pm}(z; z_1)| \leq (AL)^n / n!$$

avec

$$L = \text{diam}(K)$$
$$A = \max_{z \in K} |H(z)| \max(1, e^{2L/h})$$

ce qui vérifie la convergence. □

La proposition suivante donne une formule simple pour les wronskiens de deux quelconques des solutions construites ci-dessus. Pour alléger les notations on pose $z_j = z(x_j)$ et $w^j_\pm = w_\pm(., E, h; x_0, x_j)$ pour $j = 1, 2$. Soit aussi $W^\pm_P$ et $W^\pm_I$ les deux fonctions définies par

$$W^\pm_P(z;z_1) = \sum_{p=0}^{\infty} W_{2p,\pm}(z;z_1) \qquad W^\pm_I(z;z_1) = \sum_{p=0}^{\infty} W_{2p+1,\pm}(z;z_1) \tag{A.6}$$

Proposition A.2 *Sous les hypothèses de la proposition précédente, les fonctions $W^\pm_P$ et $W^\pm_I$ sont holomorphes sur $z(\Omega_1)$ et l'on a*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(w^1_+, w^2_-) &= -\frac{2}{h} W^+_P(z_2; z_1) \\ \mathcal{W}(w^1_+, w^2_+) &= \frac{2}{h} W^+_I(z_2; z_1) \\ \mathcal{W}(w^1_-, w^2_-) &= -\frac{2}{h} W^-_I(z_2; z_1) \end{aligned}$$

Preuve: Par un calcul direct utilisant (A.4), on a

$$\frac{h}{2}\mathcal{W}(w^1_+, w^2_-) = W^+_I(z;z_1)W^-_I(z;z_2) - W^+_P(z;z_1)W^-_P(z;z_2)$$

Puisque le wronskien de deux solutions de (A.1) ne dépend pas de z, on peut l'évaluer en $z = z_2$, et les conditions initiales de (A.4) donnent alors l'expression du premier des wronskiens ci-dessus. Le calcul des autres est identique. $\square$

Les expressions (A.6) en séries convergentes donnent sous certaines conditions le développement asymptotique en h de ces fonctions. Commençons par la

Définition A.3 Soit $\tilde{x}$ et x deux points dans Ω_1. On dit qu'un chemin $\gamma(\tilde{x}, x)$ de Ω, d'origine $\tilde{x}$ et d'extremité x est un *chemin canonique de type* $\pm$ si la fonction $t \mapsto \pm \operatorname{Re} z(t, x_0, E)$ est strictement croissante le long de $\gamma(\tilde{x}, x)$. On définit aussi le *domaine canonique* $\Omega^\pm_1(\tilde{x})$ de type $\pm$ comme le sous-ensemble de Ω_1 dont tous les points peuvent être joint à $\tilde{x}$ par un chemin canonique de type $\pm$.

On a alors le resultat crucial suivant:

Proposition A.4 *Soit x_1 un point de Ω_1 et $\Omega^\pm_1$ le domaine canonique de type $\pm$ associé. Alors $W^\pm_P$, $W^\pm_I$ sont des symboles analytiques classiques d'ordre* 0 *et* 1 *respectivement dans $\Omega^\pm_1$.*

Preuve: On va seulement démontrer que $W^+_P(z;z_1)$ admet $\sum_{p=0}^\infty W_{2p,+}(z;z_1)$ comme développement asymptotique classique, c'est-à-dire que

$$W^+_P(z;z_1) - \sum_{p=0}^{N} W_{2p,+}(z;z_1) = O(h^{N+1}) \tag{A.7}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$ lorsque $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_1$. Pour la preuve que $W_P^+(z; z_1)$ est un symbole analytique, on renvoie le lecteur à l'appendice de [Ge-Gr]. Posons

$$||f|| = \sup_{\Gamma(z_1,z)} |f| + h \sup_{\Gamma(z_1,z)} |f'|$$

Estimons d'abord $||I_+(f,h)||$ à partir de $||f||$. En choisissant $s = (t-z)/h$ comme nouvelle variable $s = (t-z)/h$ et en développant $f(z+sh)$ en série de Taylor, on a

$$\begin{aligned} I_+(f,h) &= h \int_{(z_1-z)/h}^{0} e^{2s}(Hf)(z+sh)ds \\ &= \frac{h}{2}(Hf)(z)(1-e^{2(z_1-z)/h}) + h^2 \int_{(z_1-z)/h}^{0} se^{2s}ds \int_0^1 (Hf)'(z+sht)dt \end{aligned} \tag{A.8}$$

ce qui donne immédiatement

$$\sup_{\Gamma(z_1,z)} |J \circ I_+(f,h)| \leq Ch||f||$$

En notant que $d(J \circ I_+(f,h))/dz = HI_+(f,h)$, on obtient

$$||J \circ I_+(f,h)|| \leq Ch||f|| \tag{A.9}$$

On a donc

$$||W_{2p,+}|| = ||(J \circ I_+)^p(1)|| \leq C_0(C_1h)^p$$

et l'on obtient (A.7). □

Remarque A.5 Il est très important de noter que les deux propositions qui précèdent ne donnent le développement asymptotique en h du wronskien que lorsque les solutions BKW exactes sont de types différents. En effet on sait que $W_P = 1 + O(h^2)$, alors qu'on ne connait qu'une majoration de W_I, précisément $W_I = O(h)$.

On reprend maintenant la preuve précédente pour démontrer la fin de la Proposition 3.1. Il s'agit de calculer le développement asymptotique en h des wronskiens $\mathcal{W}(w_d^{2,+}, w_g^{2,+})$ et $\mathcal{W}(w_g^{2,-}, w_d^{2,-})$ pour μ complexe, pouvant tendre vers 0 avec h. Le resultat découle de la

Proposition A.6 *Pour tout μ dans $\hat{D}(R,]-3\pi/2, \pi/2[)$, on a pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} & W_P^+(z_g^{2,+}; z_d^{2,+}) - \sum_{p=0}^{N} W_{2p,+}(z_g^{2,+}; z_d^{2,+}) \\ = & \begin{cases} O\left(\left(\frac{h}{|\operatorname{Re} S_2(\mu)|}\right)^{N+1}\right) & \textit{pour} \quad \operatorname{Im}\mu > 0 \\ O\left(\left(\frac{h}{|S_2(\mu)|}\right)^{N+1}\right) & \textit{pour} \quad \operatorname{Im}\mu < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où le chemin d'intégration $\Gamma(z_d^{2,+}, z_g^{2,+})$ *de (A.5)*$_+$ *passe entre* α_2 *et* β_2.

De même, pour tout μ *dans* $\hat{D}(R,]-\pi/2, 3\pi/2[)$, *on a pour tout* $N \in \mathbb{N}$,

$$W_P^+(z_d^{2,-}; z_g^{2,-}) - \sum_{p=0}^N W_{2p,+}(z_d^{2,-}; z_g^{2,-})$$
$$= \begin{cases} O((\dfrac{h}{|\operatorname{Re} S_2(\mu)|})^{N+1}) & \textit{pour} \quad \operatorname{Im}\mu < 0 \\ O((\dfrac{h}{|S_2(\mu)|})^{N+1}) & \textit{pour} \quad \operatorname{Im}\mu > 0 \end{cases}$$

où le chemin d'intégration $\Gamma(z_g^{2,-}, z_d^{2,-})$ *de (A.5)*$_+$ *passe entre* α_2 *et* β_2.

Preuve: Il nous faut expliciter la constante C dans (A.9) qui dépend en fait de l'énergie μ. On va vérifier que sur $\Gamma(z_g^{2,-}, z_d^{2,-})$ on a:

$$\sup|J \circ I_+(f,h)| \leq C(\epsilon + \epsilon^2)\sup|f| + Ch\epsilon\sup|f'| \qquad \text{(A.10)}$$

où

$$\epsilon = \epsilon(\mu, h) = \begin{cases} \dfrac{h}{|\operatorname{Re} S_2(\mu)|} & \text{pour} \quad \operatorname{Im}\mu > 0 \\ \dfrac{h}{|S_2(\mu)|} & \text{pour} \quad \operatorname{Im}\mu < 0 \end{cases}$$

et où la constante C ne dépend pas de μ, ce qui donnera la Proposition. A partir de la formule (A.8), on voit comme dans [Ge-Gr] (cf. Proposition 2.4) que le membre de gauche de (A.10) est majoré par des termes de la forme $h\sup|f|\int|H|^2|dt|$, $h^2\sup|f|\int|H'|^2|dt|$ et $h^2\sup|f'|\int|H|^2|dt|$. Il suffit donc d'estimer $\int|H(t)|^2|dt|$ et $\int|H'(t)|^2|dt|$, où le chemin d'intégration est $\Gamma(z_d^{2,+}, z_g^{2,+})$, ce qui équivaut à minorer la distance entre l'image des points tournants et le chemin $\Gamma(z_d^{2,+}, z_g^{2,+})$ dans le plan des z (cf. (A.3)). Rappelons que

$$z = \int_{\alpha_2}^x (V(y) - E)^{1/2} dy$$

où la détermination de $(V(y) - E)^{1/2}$ est prise en $x_d^{2,+}$ comme au début de la section 3 mais prolongé à $x_g^{2,+}$ le long d'un chemin passant entre α_2 et β_2. On a alors $\operatorname{Re} z_d^{2,+} < \operatorname{Re} z_g^{2,+}$, et $\operatorname{Re} z(\alpha_2)$, $\operatorname{Re} z(\beta_2)$ se trouvent entre ces deux valeurs. Il faut donc étudier la position relative de $z(\alpha_2)$ et $z(\beta_2)$ lorsque μ varie dans $\hat{D}(R; [-3\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta])$. On divise $\hat{D}(R; [-3\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta])$ en quatre parties par les trois lignes $l_1 = \{\mu; \operatorname{Im} S_2(\mu) = 0, \operatorname{Re}\mu > 0\}$, $l_2 = \{\mu; \operatorname{Re} S_2(\mu) = 0, \operatorname{Im}\mu < 0\}$ et $l_3 = \{\mu; \operatorname{Im} S_2(\mu) = 0, \operatorname{Re}\mu < 0\}$ (cf. Figure 9). Remarquons que l_1 et l_3 coïncide avec l'axe réel et que l_3 est tangent à l'axe imaginaire à l'origine. On note alors D_{++}, D_{+-}, D_{--}, D_{-+} les quatre domaines correspondants. On a alors

$$\operatorname{Re} z(\alpha_2) > \operatorname{Re} z(\beta_2) \qquad \text{dans} \qquad D_{++} \cup D_{+-}$$

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{Re} z(\alpha_2) < \operatorname{Re} z(\beta_2) & \text{dans} & D_{--} \cup D_{-+} \\
\operatorname{Im} z(\alpha_2) > \operatorname{Im} z(\beta_2) & \text{dans} & D_{++} \cup D_{-+} \\
\operatorname{Im} z(\alpha_2) < \operatorname{Im} z(\beta_2) & \text{dans} & D_{+-} \cup D_{--}
\end{array}$$

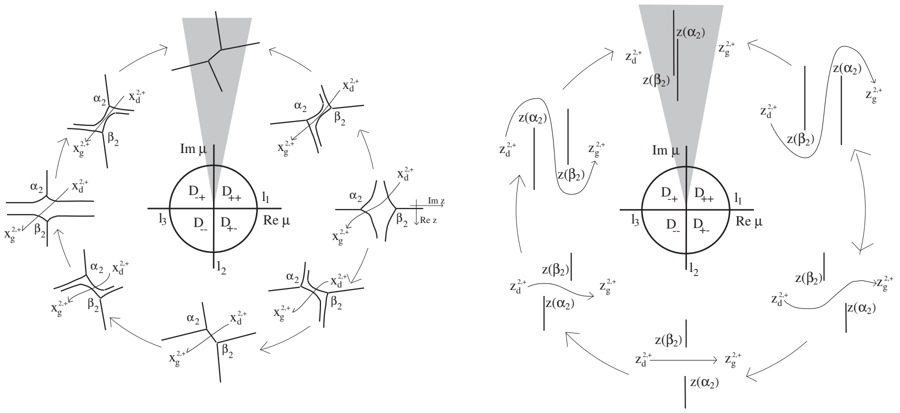

Figure 9: Le plan des z pour $\mu \in \hat{D}(R; [-3\pi/2 + \delta, \pi/2 - \delta])$

Le chemin $\Gamma(z_d^{2,+}, z_g^{2,+})$ est l'image par $z(x)$ d'un chemin dans le plan de x qui passe entre α_2 et β_2 de telle manière que $\operatorname{Re} z$ est croissante sur ce chemin. Dans le plan des z, cela revient à dire que $\Gamma(z_d^{2,+}, z_g^{2,+})$ passe au dessous de $z(\beta_2)$ et au dessus de $z(\alpha_2)$. On veut prendre ce chemin de sorte qu'il passe loin de $z(\alpha_2)$ et $z(\beta_2)$. On voit que cette distance est minorée par $|\operatorname{Re} S_2(\mu)|$ dans $D_{++} \cup D_{-+}$ (c'est-à-dire $\operatorname{Im} \mu > 0$) et par $|S_2(\mu)|$ dans $D_{+-} \cup D_{--}$ (c'est-à-dire $\operatorname{Im} \mu < 0$). Plus précisémment, si $\operatorname{Im} \mu > 0$,

$$\min\{\operatorname{dist}(z(\alpha_2), \Gamma(z_d^{2,+}, z_g^{2,+})), \operatorname{dist}(z(\beta_2), \Gamma(z_d^{2,+}, z_g^{2,+}))\} \geq \frac{1}{3} |\operatorname{Re} S_2(\mu)|$$

et si $\operatorname{Im} \mu < 0$,

$$\min\{\operatorname{dist}(z(\alpha_2), \Gamma(z_d^{2,+}, z_g^{2,+})), \operatorname{dist}(z(\beta_2), \Gamma(z_d^{2,+}, z_g^{2,+}))\} \geq \frac{1}{3} |S_2(\mu)|$$

On voit alors que

$$\int |H(t)|^2 |dt| \leq C\epsilon, \quad \int |H'(t)|^2 |dt| \leq C\epsilon^2$$

ce qui prouve (A.10). La deuxième partie de la proposition se démontre de la même manière. □

B Solutions de Jost

On construit également les solutions de Jost en adaptant un peu la méthode exposée ci-dessus. On travaille dans des domaines $\mathcal{S}^{d,g}(E)$ où $|V(x)| < |E|$ et qui coïncident avec le secteur $\mathcal{S}$ lorsque $|\operatorname{Re} x|$ est assez grand. On normalise d'abord la phase à l'infini en remarquant que

$$(V(t)-E)^{1/2} - i\sqrt{E} = \frac{V(t)}{(V(t)-E)^{1/2} + i\sqrt{E}}$$

où $\sqrt{E} > 0$ pour $E > 0$, et en posant

$$z^d(x,E) = i\sqrt{E}x + \int_{+\infty}^{x} \frac{V(t)}{(V(t)-E)^{1/2} + i\sqrt{E}}\, dt$$

$$z^g(x,E) = i\sqrt{E}x + \int_{-\infty}^{x} \frac{V(t)}{(V(t)-E)^{1/2} + i\sqrt{E}}\, dt$$

La fonction $z^{d,g}(x,E)$ est alors une primitive de $(V(t)-E)^{1/2}$ et l'on a, pour tout $x_0^{d,g} \in \mathcal{S}^{d,g}(E)$

$$z^{d,g}(x,E) = z(x, x_0^{d,g}, E) + z^{d,g}(x_0^{d,g}, E)$$

Il est intéressant de noter que lorsque x est réel dans $\mathcal{S}^{d,g}(E)$, on peut écrire

$$z^d(x,E) = i\sqrt{E}x + i\int_{+\infty}^{x} \{\sqrt{|V(t)-E|} - \sqrt{E}\}\, dt$$

$$z^g(x,E) = i\sqrt{E}x + i\int_{-\infty}^{x} \{\sqrt{|V(t)-E|} - \sqrt{E}\}\, dt$$

ce qui montre que $z^{d,g}(x,E)$ est alors purement imaginaire.

Pour normaliser les symboles $W^{\pm} = \sum_{n\geq 0} W_n^{\pm}$ à l'infini, on choisit les solutions suivantes du système d'équations récurrentes ci-dessous

$$\left\{\begin{array}{rcl} \tilde{W}_{0,\pm}^{d,g}(z,h) & = & 1 \\ \tilde{W}_{2p+1,\pm}^{d,g}(z,h) & = & -\displaystyle\int_{\Gamma_{\pm}^{d,g}(z)} \mathrm{e}^{\pm 2(\zeta - z)/h} H(\zeta)\tilde{W}_{2p,\pm}^{d,g}(\zeta)d\zeta \\ \tilde{W}_{2p,\pm}^{d,g}(z,h) & = & -\displaystyle\int_{\Gamma_{\pm}^{d,g}(z)} H(\zeta)\tilde{W}_{2p-1,\pm}^{d,g}(\zeta)d\zeta \end{array}\right.$$

où $\Gamma_{\pm}^{d,g}(z)$ est l'image par $x \mapsto z$ d'un chemin $\gamma_{\pm}^{d,g}(x)$ d'extrémité x et qui part à l'infini asymptotiquement à la droite $\operatorname{Im}\xi = \mp\delta \operatorname{Re}\xi$ quand $\operatorname{Re}\xi \to -\infty$, tout en restant transverse aux lignes de Stokes (cf. [Ra], Prop. 4). Notant $\tilde{w}_{\pm}^{d,g}$ les solutions correspondantes, c'est-à dire

$$\tilde{w}_{\pm}^{d,g}(x,E,h) = (V(x)-E)^{-1/4}\, \mathrm{e}^{\pm z^{d,g}(x,E)/h}\, \tilde{W}_{\pm}^{d,g}(x,h,E)$$

on obtient la

Proposition B.1 *Les fonctions $\tilde{w}_\pm^{d,g}$ sont des solutions de l'équation de Schrödinger dans $\mathcal{S}^{d,g}(E)$ respectivement, et l'on a*

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{|x|\to\infty, x\in\mathcal{S}^g(E)} \mathrm{e}^{\mp i\sqrt{E}x/h}\, \tilde{w}_\pm^g(x) = e^{i\pi/4}E^{-1/4} \\ \displaystyle\lim_{|x|\to\infty, x\in\mathcal{S}^d(E)} \mathrm{e}^{\mp i\sqrt{E}x/h}\, \tilde{w}_\pm^d(x) = e^{-i\pi/4}E^{-1/4} \end{cases}$$

où $\arg E^{-1/4} = 0$ *pour* $E > 0$*. De plus* $(\tilde{w}_+^g, \tilde{w}_-^g)$ *(resp.* $(\tilde{w}_+^d, \tilde{w}_-^d)$*) est une base de l'espace des solutions dans* $\Omega^g(E)$ *(resp.* $\Omega^d(E)$*).*

On voit donc que les $\tilde{w}_\pm^{d,g}$ sont proportionnelles aux solutions de Jost. Nous utilisons également un autre choix pour la normalisation des phases, tout en gardant la normalisation à l'infini pour les symboles. On notera

$$w_\pm^{d,g}(x,E,h;x_0^{d,g}) = (V(x)-E)^{-1/4}\,\mathrm{e}^{\pm z(x,x_0^{d,g},E)/h}\, W_\pm^{d,g}(x,h,E,x_0^{d,g})$$

les solutions construites comme ci-dessus mais avec cette fois

$$z(x,E) = z(x,x_0^{d,g},E) = \int_{x_0^{d,g}}^x (V(t)-E)^{1/2}\,dt$$

plutôt que $z^{d,g}$, où $x_0^{d,g}$ sont des points fixés de $\mathcal{S}^{d,g}(E)$. Le lien entre ces solutions et les $\tilde{w}_\pm^{d,g}(x,E,h)$ est donné dans la proposition suivante:

Proposition B.2 *Les fonctions $w_\pm^{d,g}$ sont des solutions de l'équation de Schrödinger dans $\mathcal{S}^{d,g}(E)$ respectivement, et l'on a*

$$\tilde{w}_\pm^{d,g}(x,E,h) = \mathrm{e}^{\pm z^{d,g}(x_0^{d,g},E)/h}\, w_\pm^{d,g}(x,E,h;x_0^{d,g})$$

Nous avons résumé dans le tableau ci-dessous les différentes solutions BKW utilisées dans le texte en rappelant à chaque fois les normalisations de la phase et du symbole choisies.

Notations	Normalisation de la phase	Normalisation du symbole
$\tilde{w}_\pm^{d,g}(x,E,h)$	$\pm\infty$	$\pm\infty(1\pm i\delta)$
$w_\pm^{d,g}(x,E,h;x_0^{d,g})$	$x_0^{d,g}$	$\pm\infty(1\pm i\delta)$
$w_\pm(x,E,h;x_0^{d,g},x_\pm^{d,g})$	$x_0^{d,g}$	$x_\pm^{d,g}$

On a enfin la proposition suivante, qui montre que les solutions $w_\pm^{d,g}$ et $w_\pm$ sont proportionnelles. Il suffit pour s'en convaincre d'écrire $w_\pm(x)$ dans la base $(w_+^{d,g}, w_-^{d,g})$ et de faire tendre x vers l'infini dans la direction ad hoc.

Proposition B.3 *Il existe un symbole analytique classique $\alpha_\pm^{d,g}(h)$ d'ordre positif tel que, dans chaque domaine où ces solutions sont définies, on a*

$$w_\pm(x,E,h;x_0^{d,g},x_\pm^{d,g}) = (1+h\alpha_\pm^{d,g}(h))w_\pm^{d,g}(x,E,h;x_0^{d,g})$$

C Solutions microlocales

Nous décrivons maintenant le comportement asymptotique quand h tend vers 0 des solutions de l'équation (A.1) près d'un maximum quadratique du potentiel. On suppose que $V(x)$ admet un maximum non-dégénéré V_0 au point $0 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire:

$$V(0)=V_0 \quad V'(0)=0 \quad V''(0)<0$$

On pose $\mu = V_0 - E$ et $k(x)^2 = V_0 - V(x)$, où $k(x)$ est choisie positive pour $x>0$. On note également $k_0 = \sqrt{-V''(0)/2}$. La fonction $k(x)$ est analytique sur un voisinage de 0 et $k(0)=0$, $k'(0)=k_0$. L'équation (A.1) s'écrit alors:

$$Q(x,hD)u = \nu u$$

où $Q(x,\hbar D) = \frac{1}{2}\hbar^2 D^2 + V_1(x)$ et $\hbar = h/k_0$, $V_1(x) = -k(x)^2/(2k_0^2)$, $\nu = -\mu/(2k_0^2)$. Le symbole principal en tant qu'opérateur $\hbar$-différentiel de Q est $(\xi^2 - x^2 + O(x^3))/2$. La proposition suivante (cf. [He-Sj]$_2$) permet de nous ramener à l'opérateur $Q_0 = (x\hbar D + \hbar D x)/2$ microlocalement près de $(x,\xi) = (0,0)$.

Proposition C.1 *(B.Helffer, J.Sjöstrand)*
Il existe un symbole analytique classique $F(t,\hbar) = f_0(t) + f_1(t)\hbar + \cdots$ à valeur réelle sur $\mathbb{R}$ et un opérateur intégral de Fourier unitaire U de la forme:

$$Uu(x) = 2^{1/4}e^{i\pi/8}\int e^{i\psi(x,y)/\hbar}\sigma(x,y)u(y)\frac{dy}{\sqrt{2\pi\hbar}}(1+\tilde{O}(\hbar))$$

tels que

$$U^*F(Q,\hbar)U = Q_0 = \frac{1}{2}(x\hbar D + \hbar D x)$$

microlocalement près de $(0,0)$. De plus, on a

$$f_0(t) = -\frac{1}{\pi}S(t) \qquad f_1(t) = 0$$

où $S(t)$ est l'action classique entre les deux points tournants $a(t)$ et $b(t)$:

$$S(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \sqrt{2(V_1(x)-t)}\,dx$$

où $\sqrt{2(V_1(x)-t)}$ est positive quand $t<0$ et $x\in\mathbb{R}$ près de 0.

Enfin pour tout (x,y) près de $(0,0)$, on a

1. $\psi(x,y)=\psi_0(x,y)+O((x,y)^3)$ où $\psi_0(x,y)=-\dfrac{x^2}{2}+\sqrt{2}xy-\dfrac{y^2}{2}$
2. $\sigma(0,0)=1$
3. *$f_0\circ q\circ\kappa=q_0$ où q et q_0 sont les symboles principaux des opérateurs Q et Q_0 respectivement et κ est la transformation canonique associée à U, c'est-à-dire que*

$$\kappa \quad : \quad (y,-\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)) \quad \to \quad (x,\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y))$$

Nous sommes donc ramenés à l'équation

$$Q_0(x,hD)u=\nu' u \tag{C.1}$$

où $\nu'=F(\nu,\hbar)$, c'est-à-dire

$$xu'+(\frac{1}{2}-i\frac{\nu'}{h})u=0$$

Lorsque $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\nu'}{h}\notin\mathbb{Z}^-$, on trouve facilement deux solutions maximales

$$u_\pm^0(x,\nu',\hbar)=H(\pm x)|x|^{-1/2}e^{i\nu'\log|x|/\hbar}$$

puis deux autres solutions en utilisant les symétries de l'opérateur Q_0 , c'est-à dire $[Q_0,\mathcal{F}_\hbar^{-1}\Gamma]=0$:

$$v_\pm^0(x,\nu',\hbar)=\mathcal{F}_\hbar^{-1}\Gamma u_\pm^0(\xi,\nu',\hbar)$$

où $\Gamma u=\overline{u}$ et $\mathcal{F}_\hbar^{-1}$ désigne la transformation de Fourier inverse semiclassique:

$$\mathcal{F}_\hbar^{-1}u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi/\hbar}u(\xi)d\xi$$

Ces quatre solutions ne sont pas indépendantes et l'on a la

Proposition C.2 *Soit ν' un complexe avec $\nu'=O(h)$ et $\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\nu'}{h}\notin\mathbb{Z}^-$. Si u dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est une solution de l'équation $Q_0u=\nu'u$ alors u est dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ et il existe $\alpha_+,\alpha_-,\beta_+$ et β_- tels que*

$$u=\alpha_+u_+^0+\alpha_-u_-^0=\beta_+v_+^0+\beta_-v_-^0$$

et

$$\begin{pmatrix}\alpha_+\\ \alpha_-\end{pmatrix}=B(\hbar,\nu')\begin{pmatrix}\beta_+\\ \beta_-\end{pmatrix}$$

où la matrice de branchement $B(\hbar, \nu')$ *est donnée par*

$$B(\hbar, \nu') = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$$

$$p = \frac{\hbar^{-i\frac{\nu'}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\frac{1}{2} - i\frac{\nu'}{\hbar})e^{\pi i(\frac{1}{2}-i\frac{\nu'}{\hbar})/2} \qquad q = \frac{\hbar^{-i\frac{\nu'}{\hbar}}}{\sqrt{2\pi}}\Gamma(\frac{1}{2} - i\frac{\nu'}{\hbar})e^{-\pi i(\frac{1}{2}-i\frac{\nu'}{\hbar})/2}$$

La proposition suivante décrit le microsupport de ces distributions. Pour la notion de microsupport, nous renvoyons le lecteur à l'Appendice D. Il est important de noter que puisque ν' est d'ordre $\hbar$, le microsupport des solutions de l'équation $Q_0 u = \nu' u$ est contenu dans $q_0^{-1}(0)$, où $q_0(x, \xi) = x\xi$ est le symbole principal de Q_0.

Proposition C.3 *Soit $\sigma_{d,g,h,b}$ les demi-droites de $T^*\mathbb{R}$ définies par $\sigma_g = \mathbb{R}^- \times \{0\}$, $\sigma_d = \mathbb{R}^+ \times \{0\}$, $\sigma_h = \{0\} \times \mathbb{R}^+$, and $\sigma_b = \{0\} \times \mathbb{R}^-$. Alors*

- *$MS(u_0^+)$ est inclus dans $\sigma_d \cup \sigma_h \cup \sigma_b$*
- *$MS(u_0^-)$ est inclus dans $\sigma_g \cup \sigma_h \cup \sigma_b$*
- *$MS(v_0^+)$ est inclus dans $\sigma_h \cup \sigma_g \cup \sigma_d$*
- *$MS(v_0^-)$ est inclus dans $\sigma_b \cup \sigma_g \cup \sigma_d$*

On définit alors quatre solutions microlocales de l'équation $Qu = \nu u$ à partir du théorème de réduction. On notera $u_\pm$ et $v_\pm$ les solutions données par

$$u_\pm = U u_\pm^0 \qquad \text{and} \qquad v_\pm = U v_\pm^0$$

Grâce aux symétries de l'opérateur U ($U\Gamma\mathcal{F}_\hbar^{-1} = \Gamma U$), on voit facilement que $v_- = \Gamma u_+$ et $v_+ = \Gamma u_-$ puisque par exemple

$$v_- = U v_-^0 = U\Gamma\mathcal{F}_\hbar u_-^0 = U\Gamma\mathcal{F}_\hbar^{-1}\mathcal{F}_\hbar^2 u_-^0 = \Gamma U u_+^0 = \Gamma u_+$$

Il suffit donc d'étudier u_+ et u_- dans un voisinage ω de $(0, 0)$. Leur microsupport est l'image par la transformation canonique associée à U de celui de $u_0^\pm$ et $v_0^\pm$: notant $\sigma_\pm^{d,g}$ les segments dans $q^{-1}(0) \cap \omega$ définis par $\sigma_\pm^g = \{(x, \xi) \in q^{-1}(0) \cap \omega, x \leq 0, \pm\xi \geq 0\}$ et $\sigma_\pm^d = \{(x, \xi) \in q^{-1}(0) \cap \omega, x \geq 0, \pm\xi \geq 0\}$, on voit que $MS(u_+)$ est contenu dans $\sigma_+^g \cup \sigma_+^d \cup \sigma_-^d$ et que $MS(u_-)$ est inclus dans $\sigma_+^g \cup \sigma_-^g \cup \sigma_-^d$ (voir la Figure 8).

Nous nous intéressons au (terme dominant du) développement asymptotique de u_+. Rappelons que pour μ assez petit il y a deux points tournants $\alpha(\mu)$ et $\beta(\mu)$ proches de $\pm\sqrt{\mu}/k_0$, et nous sommes donc contraints de travailler en dehors d'un très petit voisinage fixe de l'origine pour éviter ces points tournants. On obtient alors le développement de u_+ par la méthode de la phase stationnaire (cf. [Ra], Proposition 13 et Corollaire 2) à partir de l'expression suivante, valable microlocalement près de $(0,0)$ au niveau du symbole principal:

$$u_+(x,\hbar) = \frac{2^{1/4}\,\mathrm{e}^{i\pi/8}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{i\psi(x,y)/\hbar}\, u_+^0(y,\hbar)\sigma(x,y)\,dy$$

Puisque $\nu' - f_0(\nu) = O(\hbar^2)$, l'expression ci-dessus peut s'écrire

$$u_+(x,\hbar) = \frac{2^{1/4}\,\mathrm{e}^{i\pi/8}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{i\Psi(x,y,\nu)/\hbar}\,\sigma(x,y)\frac{dy}{\sqrt{y}}$$

où $\Psi(x,y,\nu) = \psi(x,y) + f_0(\nu)\log y$. On montre alors que la phase $\Psi(x,y,\nu)$ admet un unique point critique $y_c(x,\nu)$ non-dégénéré pour tout $x > \epsilon_0 > 0$ assez petit, proche de $\sqrt{2}x + O(x^3)$, et l'on obtient la

Proposition C.4 *Au niveau du symbole principal et microlocalement près de σ_+^d, on a*

$$u_+(x,\hbar) = \frac{2^{1/4}\,\mathrm{e}^{-i\pi/8}}{|y_c(x,\nu)|^{1/2}}\,\mathrm{e}^{i\phi_+(x,\nu)/\hbar}\,\frac{\sigma_0(x,y_c(x,\nu))}{|\partial_y^2\Psi(x,y_c(x,\nu),\nu)|^{1/2}}$$

où

$$\phi_+(x,\nu) = \int_{\beta(\nu)}^{x} (2(\nu - V_0(t)))^{1/2}\,dt + \phi_+(\beta(\nu),\nu)$$

et

$$\phi_+(\beta(\nu),\nu) = \frac{1}{2}\nu_0'(\log(-\nu_0') - 1)$$

Remarque C.5 Pour clarifier l'exposé nous avons travaillé avec la phase $\Psi(x,y,\nu) = \psi(x,y) + f_0(\nu)\log y$, qui comporte une partie imaginaire puisque ν n'est pas forcément réel. Les résultats énoncés ci-dessus sont néanmoins valables compte tenu du fait que $\mathrm{Im}\,\nu = O(h)$.

De la même manière on a

$$u_-(x,\hbar) = \frac{2^{1/4}\,\mathrm{e}^{i\pi/8}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{i(\psi(x,y)-\nu_0'\log|y|)/\hbar}\,|y|^{-1/2}\sigma_0(x,y)\,dy$$

La phase possède encore un unique point critique non-dégénéré $y_c(x,\nu)$ pour tout $x < -\epsilon_0 < 0$ assez petit, et la valeur critique correspondante s'écrit

$$\phi_-(x,\nu) = -\int_{a(\nu)}^{x} (2(\nu - V_0(t)))^{1/2}\,dt + \phi_-(a(\nu),\nu)$$

où

$$\phi_-(\alpha(\nu),\nu)=\phi_+(\beta(\nu),\nu)$$

Avec ces notations on a donc aussi la

Proposition C.6 *Au niveau du symbole principal et microlocalement près de σ_-^g, on a*

$$u_-(x,\hbar)=\frac{2^{1/4}\,\mathrm{e}^{-i\pi/8}}{|y_c(x,\nu)|^{1/2}}\mathrm{e}^{i\phi_-(x,\nu)/\hbar}\,\frac{\sigma_0(x,y_c(x,\nu))}{|\partial_y^2\Psi(x,y_c(x,\nu),\nu)|^{1/2}}$$

D Eléments d'analyse semiclassique microlocale

D.1 Espaces de Sjöstrand

Définition D.1 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et Φ une fonction continue sur Ω. L'espace de Sjöstrand $H_\Phi(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f(z,h)$ analytiques en z dans Ω et telle que, pour tout compact K de Ω, il existe $C,\epsilon>0$ telle que

$$\sup\{|f(z,h)|, z\in K\}\leq C\,\mathrm{e}^{(\Phi(z)+\epsilon)/h}$$

Définition D.2 Soit $f(z,h)$ et $g(z,h)$ deux fonctions de $H_\Phi(\Omega)$, et $\omega\subset\Omega$. On dit que $f\equiv g$ dans ω si, pour tout compact K de ω, il existe $C,\epsilon>0$ telle que

$$\sup\{|f(z,h)-g(z,h)|, z\in K\}\leq C\,\mathrm{e}^{(\Phi(z)-\epsilon)/h}$$

On note $\mathcal{H}_\Phi(\Omega)$ l'espace quotient correspondant.

Définition D.3 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $h_0>0$ un réel. Une fonction $f(z,h)$ définie dans $\Omega\times]0,h_0[$ est un *symbole analytique classique* d'ordre $m\in\mathbb{N}$ en h si f est analytique en z dans U s'il existe une suite $(a_j(z))$ de fonctions analytiques en U telles que

- Pour tout compact $K\subset\Omega$, il existe $C>0$ telle que, pour tout z dans K, on a $|a_j(z)|\leq C^{j+1}j^j$
- Pour tout $z\in\Omega$, $f(z,h)$ admet $\sum_{j\geq 0}a_j(z)h^{m+j}$ comme développement asymptotique quand h tend vers 0.

On appellera symbole analytique formel toute suite de fonctions $(a_j(z))$ comme dans la définition précédente. A un tel symbole formel on peut associer une réalisation dans $H_0(\Omega)$ par sommation au sens des astronomes (ou sommation au plus petit reste). La différence entre deux telles réalisations étant d'ordre $O(e^{-\epsilon/h})$, on définit ainsi une injection de l'ensemble des symboles formels dans $\mathcal{H}_0(\Omega)$.

D.2 Microsupport

Définition D.4 Soit $(u_h)_{]0,h_0]}$ une famille de distributions à support compact. On appelle transformé de FBI de (u_h) la fonction analytique en z définie par

$$\mathcal{T}u(z,h) = \int \mathrm{e}^{-(z-x)^2/2h}\, u_h(x)dx$$

Lorsque les semi-normes de (u_h) sont d'ordre $O(h^{-N})$ quand $h \to 0$ pour un certain entier $N \geq 0$, $\mathcal{T}u(z,h)$ appartient à l'espace de Sjöstrand $H_{(\mathrm{Im}\, z)^2/2}$.

Définition D.5 Soit $(u_h)_{]0,h_0]}$ une famille de distributions comme ci-dessus. On dit que $(x_0, \xi_0) \in T^*\mathbb{R}$ n'est pas dans le microsupport de (u_h) s'il existe un voisinage complexe ω of $z_0 = x_0 - i\xi_0$ tel que $\mathcal{T}u(z,h)$ est nulle dans $\mathcal{H}_{(\mathrm{Im}\, z)^2/2}(\omega)$. On note $MS(u_h)$ le microsupport de u_h .

Proposition D.6 *Soit u une distribution qui ne dépend pas de h. Le microsupport de u est*

$$MS(u) = (\mathrm{supp}\, u \times \{0\}) \cup WF_a(u)$$

où $WF_a(u)$ désigne le front d'onde analytique de u.

Par exemple si $H(x)$ désigne la fonction de Heaviside définie par $H(x) = 0$ pour $x < 0$ et $H(x) = 1$ pour $x > 0$, on a $MS(H) = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R}^+ \times \{0\}$.

Proposition D.7 *Soit $a(x,h)$ un symbole analytique classique défini au voisinage de $\mathbb{R}$, dont le symbole principal ne s'annule pas, et $s(x)$ une fonction réelle-analytique telle que $s''(x_0) \neq 0$ si $s'(x_0) = 0$. Alors*

$$MS(a(x,h)\,\mathrm{e}^{is(x)/h}) = \{(x,\xi); \xi = s'(x)\}$$

Définition D.8 Deux (familles de) distributions u_h et v_h sont microlocalement égales près de (x_0, ξ_0) s'il existe un voisinage V de (x_0, ξ_0) dans $T^*\mathbb{R}$ tel que

$$MS(u - v) \cap V = \emptyset$$

Définition D.9 Une distribution définie microlocalement près de (x_0, ξ_0) est une classe d'équivalence de distributions à support compact près de x_0 pour la relation d'égalitḿicrolocale près de (x_0, ξ_0). On note $\mathcal{M}(x_0, \xi_0)$ l'espace quotient correspondant, et la notion de microsupport garde un sens dans cet espace.

Proposition D.10 *Soit $P(x, hD)$ un operateur h-différentiel à coefficients analytiques. Si $MS(Pu) = \emptyset$, alors $MS(u) \subset CarP$, où $CarP$ est le sous-ensemble de $T^*(\mathbb{R})$ où le symbole principale de P s'annule.*

D.3 Opérateurs Intégraux de Fourier microlocaux

Nous renvoyons le lecteur à $[\mathrm{Sj}]_2$ où [De] pour un exposé détaillé sur ce sujet, et à [He-Sj] où [Mä] pour un résumé rapide. Disons simplement que l'on peut définir un opérateur de la forme

$$Au(x, h) = \int\int \mathrm{e}^{iG(x,y,\theta)/h}\, a(x, y, \theta, h) u(y, h) dy d\theta$$

sur un contour d'intégration adéquat, où $a(x, y, \theta, h)$ est un symbole analytique classique et G une em fonction phase, qui agit continument d'un espace de Sjöstrand $\mathcal{H}_\Phi$ dans un autre. Un tel operateur est souvent appelé *transformation canonique quantifiée* ou bien ici OIF microlocal puisqu'on les considère comme operateurs agissant sur les distributions microlocales. En effet la trasformation de FBI $\mathcal{T}$ définie ci-dessus est injective de $\mathcal{M}$ sur l'espace $\mathcal{H}$ correspondant, donc posède un inverse à gauche $\mathcal{S}$, et l'on identifie la transformation canonique quantifiée A avec $\mathcal{S}A\mathcal{T}$.

Définition D.11 On dit que deux OIF microlocaux P et Q definis dans un voisinage V de (x_0, ξ_0) sont microlocalement égaux si pour toute distribution microlocale u definie dans V on a $Pu = Qu$ dans $\mathcal{M}(V)$.

Proposition D.12 *Soit A un OIF microlocal et κ sa transformation canonique associée. Si u est une distribution microlocale, le microsupport de Au est l'image par κ du microsupport de u.*

Il est bien connu qu'un opérateur h-différentiel de type principal est microlocalement égal à hD_x. On a donc enfin la

Proposition D.13 *Soit P un opérateur h-differentiel analytique et γ une characteristique simple pour P. Soit u_h et v_h deux distributions microlocales definies près de γ telles que $MS(Pu) = \emptyset$, $MS(Pv) = \emptyset$ et $MS(u) \cap \gamma \neq \emptyset$. Alors il existe un symbole analytique classique $\alpha(h)$ et un constante $\phi \in \mathbb{R}$ telle que, microlocalement près de γ, $v = \alpha(h)\, \mathrm{e}^{i\phi/h}\, u$.*

Références

[B-C-D]$_1$ P.Briet, J.-M.Combes, P.Duclos: *On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit I: Resonances free domains*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.126, n.1, 1987.

[B-C-D]$_2$ P.Briet, J.-M.Combes, P.Duclos: *On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit II: Barrier top resonances*, Comm. in Partial Differential Equations, 12(2), p.201–222, 1987.

[De] J.M.Delort: *F.B.I. transformation*, Lecture Notes in Maths n.1522, Springer-Verlag, 1993.

[Ec] Ecalle, J.: *Les Fonctions résurgentes*, Publications Mathématiques d'Orsay 81-05, 1981.

[Fu-Ra] S.Fujiié, T.Ramond: *Barrier top resonances for the radial Schrödinger equation*, en préparation.

[Ge-Gr] C.Gérard, A.Grigis: *Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier*, J. of Diff. Equations 42, p.149–177,1988

[He-Sj]$_1$ B.Helffer, J.Sjöstrand: *Résonances en limite semiclassique*, Mémoires de la Société Mathématique de France, n.24,25, 1985.

[He-Sj]$_2$ B.Helffer, J.Sjöstrand: *Semiclassical analysis of Harper's equation III*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire n.39, 1990.

[Ko] Korsch: *Semiclassical theory of resonances*, Lecture Notes in Physics No. 211, Springer, 1987.

[L-T-M] S.Y.Lee, N.Takigawa, C.Marty: *A semiclassical study of optical potentials: Potential resonances*, Nuclear Physics A308, p.161–188, 1978.

[Mä] C.März: *Spectral asymptotics for Hill's equation near the potential maximum*, Asymptotic Analysis 5, p.221–267, 1992.

[Po] C.Pommerenke: *Univalent functions*, Studia Mathematica XXV, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen 1975.

[Ra] T.Ramond: *Semiclassical study of quantum scattering on the line*, Communications in Mathematical Physics Vol.177, p.221–254,1996.

[Sj]$_1$ J.Sjöstrand: *Semiclassical resonances generated by non-degenerate critical points*, Lecture Notes in Maths n.1256, Springer, p.402–429, 1987.

[Sj]$_2$ J.Sjöstrand: *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque n.95, 1982.

[Vo] Voros, A.:*The Return of the Quartic Oscillator. The Complex WKB Method.* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor., **39**(3) (1983)