ЙОРДАНОВЫ УЗОРЫ НА АЛГЕБРАХ ЛИ И НЕГАМИЛЬТОНОВО ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Д.В.Юрьев[1]

В работе рассматривается одна из алгебраических структур, характеризующих негамильтоново взаимодействие гамильтоновых систем, структура йордановых узоров на алгебрах Ли, и исследуются соответствующие динамики. Полученные результаты позволяют предположить, что алгебраический аппарат йордановых узоров на алгебрах Ли может представлять эффективное средство для анализа асимптотически почти периодических негамильтоновых систем.

Данная работа, посвященная негамильтоновым взаимодействиям классических гамильтоновых систем, задаваемым йордановыми узорами на алгебрах Ли, состоит из двух параграфов. Первый параграф содержит необходимые мотивировки и является подробным программным введением к целому циклу (уже отчасти опубликованных) работ автора по негамильтоновым взаимодействиям классических и квантовых систем. Второй параграф носит более ограниченный характер и включает в себя описание конкретных математических структур (йордановых узоров на алгебрах Ли), возникающих при анализе негамильтонова взаимодействия. Изложены как математические, так и физические признаки динамических систем, которые допускают описание в терминах йордановых узоров, разобраны примеры, сформулированы общие гипотезы и предположения о долговременном поведении подобных систем, перечислены некоторые имеющиеся и указаны возможные физические приложения.

1. Мотивировки

Данный параграф включает два пункта: в первом перечисляются некоторые примеры негамильтоновых взаимодействий в физике и обсуждается их теоретическое и прикладное значение, во втором рассматриваются в общих чертах задачи алгебраического описания подобных взаимодействий.

[1]Предварительная электронная версия данной статьи располагается в архиве Техасского Университета по математической физике под номером "mp_arc/94-384" (Декабрь 1994).

1.1. Негамильтоновы взаимодействия в физике. Многие важные классические гамильтоновы динамические системы связаны с алгебрами Ли [1-6] или их нелинейными обобщениями [7]. Взаимодействие гамильтоновых систем может быть либо гамильтоновым, т.е. задаваемым дополнительным членом взаимодействия $\mathcal{H}_{\rm int}$ в гамильтониане и, возможно, также некоторой деформацией исходных ("свободных") скобок Пуассона, либо негамильтоновым. Последний случай, овечающий непотенциальным силам взаимодействия, представляет интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения.

В самом деле, гамильтонов подход к взаимодействию систем является абстракцией дорелятивистской механики, игнорирующей фундаментальный принцип близкодействия, лежащий в основе теоретико-полевой картины. "Нулевое" приближение классической механики справедливо лишь при небольших расстояниях между системами и малых скоростях их движения. Хотя в целом идея близкодействия несовместима с механикой материальных точек и мгновенно распространяющихся сил, наиболее точное первое полевое приближение допускает формулировку на языке негамильтоновой классической механики в терминах непотенциальных сил магнитного типа, зависящих от скоростей (подчиняющихся в электродинамике закону Ампера-Лоренца [8-12], более удобному нежели гамильтоново приближение Дарвина [13, стр.203-207]). На языке негамильтоновой классической механики могут быть сформулированы и более тонкие полевые эффекты типа явления индукции, хотя в общем случае это требует введения сил, явно зависящих от вторых производных по времени (закон Вебера [14]). Радиационное (лоренцево) трение описывается посредством сил, определяемых третьими производными [13, стр.224-250]. Отметим также, что на языке интегродифференциальной механики (запаздывающие потенциалы), восходящей к К.Ф.Гауссу (письмо к В.Э.Веберу 1845 года) и Б.Риману [15], формулируется и общий закон взаимодействия двух точечных зарядов [16]. Интегродифференциальные зависимости используются и в механике сплошных сред [17].

Аналоги закона Ампера-Лоренца могут быть написаны и для частиц, взаимодействующих посредством нелинейного поля (например, неабелева калибровочного или гравитационного). В случае гравитационного взаимодействия роль приближения Дарвина играет приближение Эйнштейна-Инфельда-Гоффмана-Эддингтона-Кларка-Фихтенгольца [13, стр.376-377; 18]. Разумеется, в нелинейном случае полные силы взаимодействия не являются парными (и даже не могут быть расщеплены путем приведения к веберовскому виду), хотя собственно негамильтоновы члены магнитного типа распадаются в сумму двухчастичных. Отметим, что один из основных эффектов общей теории относительности, смещение перигелия Меркурия (а также эффект Лензе-Тирринга векового смещения орбиты частицы в поле вращающегося центрального тела и др.), с надлежащей степенью точности описывается негамильтоновыми поправками магнитного типа к ньютоновой силе тяготения.

Неконсервативные силы взаимодействия возникают также в самой классической механике (общие неголономные связи [19-23], гироскопические системы [24-26] и взаимодействие рэлеевского (льенаровского) типа [23, 27,28], т.е. взаимодействие, осуществляемое посредством зависимости параметра релаксации от состояния воздействующей системы), в сервомеханике [22] и электротехнике (например, автоколебания в контурах генераторов и более сложных электрических схемах), и, в целом, в (естественных или искусственных) системах с обратной связью [29-34]. "Приливные" взаимодействия, управляющие вековым замедлением вращения Земли в планетарной системе Земля-Луна, а также, возможно, решающие проблему ограниченного захвата в космологии, относятся к рэлеевско-льенаровскому типу. Взаимодействия "приливного" типа на квантовом уровне характерны для широкого класса систем, как для сложных комплексов (атомных ядер и молекул), так и для "одетых" отдельных частиц (в поляризованном вакууме или квантовой среде). В целом, по-видимому, "приливные" эффекты мохно считать типичными, хотя и не всегда физически значимыми, для взаимодействия систем с учетом квантово-полевых поправок.

Отметим также, что негамильтоновы поправки, связанные с конечностью скорости распространения взаимодействия, не обязательно носят релятивистский характер. Аналогичные эффекты возникают и в механике сплошных сред, например, в простой модели n точечных вихрей, "вмороженных" в идеальную жидкость [28]. Реально, в моделях сплошной среды существенно негамильтоновы силы как магнитного (гироскопического), так и рэлеевско-льенаровского типа возникают в межсолитонных взаимодействиях, задаваемых многосолитонными решениями нелинейных уравнений математической физики или их алгеброгеометрическими возмущениями [35]. Наличие "скрытого потенциального дальнодействия" в одномерной динамике полюсов решений некоторых нелинейных уравнений [5] является исключением, лишь подтверждающим общее правило (в одномерном случае взаимодействия магнитного типа нет). Динамика нулей полиномиальных решений линейных дифференциальных уравнений в одномерном случае почти всегда негамильтонова (с парными силами взаимодействия рэлеевско-льенаровского типа) [5].

1.2. Алгебраические структуры негамильтонова взаимодействия классических гамильтоновых систем. Важной задачей математической физики является описание различных алгебраических структур, управляющих негамильтоновым взаимодействием. Из многих аргументов в пользу разумности подобной постановки задачи автору представляются наиболее убедительными следующие: (1) в алгебраическом подходе содержится новый взгляд на известные дифференциальные уравнения, свойства решений которых в свою очередь могут содержать важную алгебраическую или геометрическую информациуи (например, инстантоны или монополи), (2) алгебраически сконструированные дифференциальные уравнения часто a priori или a posteriori обладают важными и интересными свойствами (например, тем или иным видом интегрируемости), (3) в том случае, когда экспериментальные данные не полны и не позволяют однозначно фиксировать закон взаимодействия, как правило, использование дифференциальных уравнений, ассоциированных с теми или иными алгебраическими структурами, дает правильный ответ (как это было с законом магнитного взаимодействия элементарных токов Ампера-Лоренца [8-12]), (4) исходя из алгебраической структуры строятся решения задачи Вигнера (динамической обратной задачи теории представлений) [36,37] об определении квантовых коммутационных соотношений по классическим уравнениям движения, (5) знание некоторых локальных характеристик изучаемых физических динамик (таких, как поведение в ограниченном объеме пространства, на конечном промежутке времени, при специальных условиях) позволяет подобрать ранее чисто формально сконструированное дифференциальное уравнение из заданного класса, реализующее эти признаки, для описания динамик, на основании чего предсказать некоторые глобальные свойства последних (поведение в неограниченном или большем объеме пространства, на бесконечном промежутке времени и при более общих условиях).

В данной связи нельзя не упомянуть о задачах возможности реализации наперед заданной динамики при помощи некоторой механической системы со связями или электрической схемы с обратной связью.

Существует по меньшей мере два подхода к задаче описания алгебраических структур, характеризующих негамильтоново взаимодействие. При первом подходе оно связывается с деформациями исходных алгебраических структур (алгебр Ли), такими как, например, изотопические пары [38] и их нелинейные обоббщения – I–пары [39]. При втором подходе указанное взаимодействие задается некоторыми дополнительными алгебраическими структурами на алгебрах Ли. Изложению частной конструкции в рамках второго подхода посвящен следующий параграф.

2. Йордановы узоры на алгебрах Ли и негамильтоново взаимодействие

2.1. Общий формализм.

Определение 1. *Узором на алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ называется $\mathfrak{g}$-эквивариантная алгебраическая структура на ней.

Далее будут изучаться узоры определенного типа на алгебрах Ли, которые, как кажется, представляют особый интерес, и соответствующие негамильтоновы динамики.

Определение 2. *Йордановым узором на алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ с коммутатором $[\cdot,\cdot]$ называется $\mathfrak{g}$-эквивариантная структура йордановой тройной системы на $\mathfrak{g}$ с трилинейной операцией $\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle$ такой, что $[A,\langle X,A,X\rangle]+[X,\langle A,X,A\rangle]=0$.

Напомним, что *йордановой тройной системой* [40] называется линейное пространство V с трилинейной операцией $\langle\cdot,\cdot,\cdot\rangle$, удовлетворяющей тождеству $\langle x,\langle a,z,b\rangle,y\rangle=\langle\langle x,a,y\rangle,b,z\rangle+\langle\langle y,a,z\rangle,b,x\rangle-\langle\langle x,b,y\rangle,a,z\rangle$.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{A}$ – ассоциативная алгебра с инволюцией $*$, тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}=\{X\in\mathfrak{A}:X^*=-X\}$ наделяется структурой йорданова узора с $\langle X,Y,Z\rangle=XYZ+ZYX$.

Пример 2. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с инвариантной билинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle$ наделяется структурой йорданова узора с $\langle X,Y,Z\rangle = \langle X,Y\rangle\, z + \langle Z,Y\rangle\, X$.

Алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с йордановым узором допуслают две важные 4-линейные операции $\langle A,B|X,Y\rangle = \frac{1}{2}([A,\langle X,B,Y\rangle] + [B,\langle X,A,Y\rangle]) = -\frac{1}{2}([X,\langle A,Y,B\rangle] + [Y,\langle A,X,B\rangle])$ и $[A,B]_{(X,Y)} = \frac{1}{2}(\langle [A,X],Y,B\rangle + [A,\langle X,B,Y\rangle] + (X\leftrightarrow Y)) - (A\leftrightarrow B)$.

Теорема. *Для любых элементов X и Y алгебры Ли $\mathfrak{g}$, снабженной йордановым узором, операция $[\cdot,\cdot]_{(\cdot,\cdot)}$ задает на $\mathfrak{g}$ скобку Ли, согласованную с исходной скобкой $[\cdot,\cdot]$.*

Утверждение теоремы является результатом непосредственной, но трудоемкой и объемной проверки тождеств Якоби и согласования, которая, будучи чисто вычислительной, не представляет ничего поучительного.

Напомним, что I-*парой* [39] называется пара (V_1,V_2) линейных пространств V_i с заданными (вообще говоря, нелинейными) отображениями $h_1 : V_2 \mapsto \mathrm{Hom}(\bigwedge^2(V_1),V_1)$, $h_2 : V_1 \mapsto \mathrm{Hom}(\bigwedge^2(V_2),V_2)$ такими, что $h_1(A)$ и $h_2(X)$ задают скобки Ли $[\cdot,\cdot]_A$ и $[\cdot,\cdot]_X$ на пространствах V_1 и V_2 для любых элементов A из V_2 и X из V_1, соответственно. Таким образом, если $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли с йордановым узором, то $(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ является I-парой.

Определение 3. Дифференциальные уравнения

$$\begin{cases} \dot{X}_t = \{\mathcal{H},X_t\}_{A_t} + \alpha\,\langle A_t,X_t,A_t\rangle \\ \dot{A}_t = \{\mathcal{H},A_t\}_{X_t} - \alpha\,\langle X_t,A_t,X_t\rangle \end{cases}$$

где $\{\cdot,\cdot\}_Y$ – скобка Пуассона, отвечающая скобке Ли $[\cdot,\cdot] + \varepsilon[\cdot,\cdot]_{(Y,Y)}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_{\mathrm{int}}$ – гамильтониан, являющийся суммой гамильтонианов $\mathcal{H}_i$ невзаимодействующих систем и гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}_{\mathrm{int}}$, называются *динамическими уравнениями, ассоциированными с йордановым узором на алгебре Ли* $\mathfrak{g}$.

Таким образом, динамические уравнения, ассоциированные с йордановым узором на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, являются деформацией (по параметру α) динамических уравнений, ассоциированных с соответствующей I-парой $(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$ [39].

Отображение $X \mapsto \langle A,X,A\rangle$ хорошо известно из теории йордановых алгебр и симметрических пространств [41-43]. Его появление в данном контексте не следует считать неожиданным (см.например,[6]).

2.2. Негамильтоновы взаимодействия, задаваемые йордановыми узорами: конкретные модели, их физические особенности и математические свойства. Отметим, что вторые члены уравнений, описывающих негамильтоново взаимодействие, задаваемое йордановым узором, линейны по соответствующим переменным. это свойство характерно для взаимодействий льенаровского типа, возникающих, например, в контурах электрических и электромеханических систем, а также других системах с обратной связью [29-34]. Оно же, как и нелинейная (квадратичная) зависимость от состояний воздействующей системы, свойственно радиационным электромагнитным взаимодействиям между двумя зарядами с учетом нелинейных поправок Гейзенберга-Эйлера к полевому лагранжиану в приближении слабого поля [44] и редукции полевых степеней свободы по схеме, изложенной в [16]. Представляется, что данная конструкция (редукция полевых степеней свободы в двухчастичной системе со слабо нелинейным полем взаимодействия), может порождать значительное число примеров динамических уравнений, ассоциированных с йордановым узором на алгебрах Ли. Как отмечалось ранее, подобное взаимодействие может появляться и в рамках полевого подхода, восходящего к М.Фарадею и Дж.К.Максвеллу, интерпретирующего материальные частицы как полюса решений (нелинейных) полевых уравнений (как источники или "сгустки' силовых линий в оригинальной формулировке).

В линейных теориях поля (электродинамике) "йордановы" члены взаимодействия появляются в следующем за ампер-лоренцевым приближении (лагранжев аналог которого для системы двух тождественных частиц представляет собой приближение Смородинского-Голубенкова [13,стр.249-250]). Так "йорданов" член легко идентифицируется в выражении для релятивистской силы торможения излучением [13,стр.254] во внешнем поле (в том числе, создаваемом другими зарядами).

С другой стороны, указанные системы уравнений первого порядка в простейших модельных случаях (для линейных или квадратичных гамильтонианов на трехмерной алгебре Гейзенберга, иными словами, алгебре канонических скобок Пуассона на двумерной фазовой плоскости (p, q): $\{p, q\} = 1$, снабженной йордановым узором, определяемым стандартной евклидовой метрикой) после редукции к одному уравнению второго порядка приводит к ангармоническим уравнениям Льенара $\ddot{y} + f(y)\dot{y} + g(y) = 0$ или к ангармоническим уравнениям Рэлея для анизотропного трения $\ddot{y} + f_1(y)\dot{y}^2 + f_2(y)\dot{y} + f_3(y) = 0$ (номер 6.54 по [45]), хорошо известным из теории автоколебаний [27-34].

Однако, реально в физически содержательных и интересных с прикладной точки зрения примерах алгебра Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(3)$. Динамические уравнения, ассоциированные с йордановыми узорами на этой алгебре Ли, возникают в некоторых моделях упомянутого выше "приливного" взаимодействия, процессов намагничивания (см.например, [46]) и гиромагнитных явлений (типа эффектов Барнетта и Эйнштейна–де Хааза [47]), в релятивисцких (т.е. учитывающих гравитационные взаимодействия) гиросистемах (в частности, при описании релятивистской прецессии орбитальных гироскопов в рамках ОТО или ее обобщений, например, с дополнительным скалярным полем) и т.д. Возможные перспективные приложения рассматриваемых построений дополнительно отмечаются в конце статьи, но уже перечисленных конкретных проявлений изучаемой нами конструкции достаточно, чтобы исходя из физической интуиции сделать вывод, что все примеры могут быть в общем охарактеризованы как явно или неявно системы негамильтоново взаимодействующих волчков с нетривиальной перекачкой энергии между последними, как с диссипацией, так и, что наиболее интересно, с сохранением ее в целом.

Отметим ряд общих математических черт, характерных для дифференциальных уравнений, ассоциированных с йордановыми узорами. Во-первых, как отмечалось выше, негамильтонов член в указанных уравнениях линеен по состояниям самой системы. Во-вторых, он квадратичен по состояниям воздействующей системы. Насколько эти свойства могут эффективно характеризовать интересующий нас класс уравнений можно судить на основании следующего. Задача идентификации даже хорошо изученных гамильтоновых систем уравнений, т.е. определение по заданной системе, является ли она гамильтоновой мало исследована и, скорее всего, относится к разряду "диких" задач [48]. Существует лишь несколько полезных критериев негамильтоновости динамики. Например, ограниченные асимптотически почти периодические гамильтоновы движения являются почти периодическими. Ограниченность понимается в смысле ограниченности объема, заметаемого в процессе эволюции произвольной наперед взятой областью. Это остается справедливым и для негамильтоновых взаимодействий магнитного типа [38,39], но нарушается для взаимодействий, характеризуемых йордановыми узорами. Тем самым, предъявленное свойство может использоваться при идентификации указанных взаимодействий. С другой стороны, если исходная система уравнений содержала параметр при члене, описывающем негамильтоново взаимодействие, то идентификация последнего как задаваемого йордановым узором достаточно легко осуществляется на основании черт, перечисленных в начале абзаца, конечно, если алгебра Ли, управляющая невзаимодействующими гамильтоновыми системами, равно как и гамильтонианы для них известны.

Интуитивно ясно, что именно "йордановы" негамильтоновы члены в уравнениях движения осуществляют переходные процессы энергетического обмена в соответствующих физических моделях. Тем не менее, это утверждение нуждается в теоретическом подтверждении, по крайней мере на простых примерах.

2.3. Пример: йорданов узор на $\mathfrak{so}(3)$. Конкретные вычисления. Если на $\mathfrak{g}$ задана невырожденная инвариантная билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$, то имеет смысл рассматривать гамильтониан взаимодействия $\mathcal{H}_{\rm int}$ в виде $a\langle X,A\rangle + b\langle\langle X,A,X\rangle,A\rangle$. В этом случае динамические уравнения, ассоциированные с эордановым узором на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, имеют вид

$$\begin{cases} \dot X_t = \{\mathcal{H}_t, X_t\}_{A_t} + a[A_t,X_t] + \alpha\langle A_t,X_t,A_t\rangle + 2b\langle A_t,A_t|X_t,X_t\rangle \\ \dot A_t = \{\mathcal{H}_t, A_t\}_{X_t} - a[A_t,X_t] - \alpha\langle X_t,A_t,X_t\rangle - 2b\langle A_t,A_t|X_t,X_t\rangle \end{cases}$$

Рассмотрим простейший и физически содержательный пример алгебры Ли $\mathfrak{so}(3)$ (в этом случае эордановы узоры, задаваемые конструкциями примеров 1 и 2 совпадают), а также "гамильтонианы ротаторов" $\mathcal{H}_1 = \langle\Omega_1,X\rangle$, $\mathcal{H}_2 = \langle\Omega_2,A\rangle$, отвечающие сферическим заряженным частицам с закрепленными центрами во внешнем магнитном поле, и $\Omega_1=\Omega_2=\Omega$, т.е.

$$\begin{cases} \dot X_t = [\Omega,X_t] + \varepsilon(\Omega A_t^2X_t - X_tA_t^2\Omega) + (a+2b\langle A_t,X_t\rangle)[A_t,X_t] + \alpha\langle A_t,X_t\rangle A_t \\ \dot A_t = [\Omega,A_t] + \varepsilon(\Omega X_t^2A_t - A_tX_t^2\Omega) - (a+2b\langle A_t,X_t\rangle)[A_t,X_t] - \alpha\langle A_t,X_t\rangle X_t \end{cases}$$

Случай $a=b=\alpha=0$ был проинтегрирован в [39], соответствующая динамика является почти периодической с периодами, зависящими от начальных условий, траектории движения лежат на инвариантных двумерных торах. Рассмотрим два других более общих случая: случай 1 – произвольные α, a и b при $\varepsilon=0$ и случай 2 – произвольные α и ε при $a=b=0$.

Случай 1. Положим $\alpha=\alpha_0^2$, $\tau=\langle X,A\rangle$, $\rho=X^2+A^2$, $\sigma=X^2-A^2$. Тогда $\dot\rho=0$, $\dot\tau=-2\alpha_0^2\tau\sigma$, $\dot\sigma=8\alpha_0^2\tau^2$. Выразим τ через σ: $\tau=\frac{1}{2\alpha_0}\sqrt{\frac{\dot\sigma}{2}}$ и подставим в уравнение для $\dot\tau$. Получим $\ddot\sigma=-4\alpha_0^2\dot\sigma\sigma$. Положим $\varkappa=\sqrt{\sigma_0^2+4\tau_0^2}$, тогда $\dot\sigma+2\alpha_0^2\sigma^2=2\alpha_0^2\varkappa$ и $\sigma=\varkappa\,\mathrm{th}(2\varkappa\alpha_0^2t+c_0)$, $\tau=\frac{\varkappa}{2\,\mathrm{ch}(2\varkappa\alpha_0^2t+c_0)}$. Следовательно,

$$X^2=\tfrac12(\rho+\varkappa\,\mathrm{th}(2\varkappa\alpha_0^2t+c_0)),\quad A^2=\tfrac12(\rho-\varkappa\,\mathrm{th}(2\varkappa\alpha_0^2t+c_0)).$$

Сделаем замену переменных $Y=X+A\quad Z+X_A$, тогда

$$\dot Z=[\Omega,Z]+2\alpha\tau Y+(a+4b\tau)[Y,Z],\quad \dot Y=[\Omega,Y]-2\alpha\tau Z,$$

при этом $Z^2=\rho-2\tau$, $Y^2=\rho+2\tau$, $\langle Y,z\rangle=\sigma$. Положим $Z=\sqrt{\rho-2\tau}z$, $Y=\sqrt{\rho+2\tau}y$, тогда $\langle z,y\rangle=\frac{\sigma}{\sqrt{\rho^2-4\tau^2}}$ и $Y^2=z^2=1$. Величины z и y удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot y=[\Omega,y]+\frac{2\alpha\tau}{\rho+2\tau}(\sigma y-\sqrt{\rho^2-4\tau^2}z)\\ \dot z=[\Omega,z]-\frac{2\alpha\tau\sigma}{\rho-2\tau}z+2\alpha\tau\sqrt{\frac{\rho+2\tau}{\rho-2\tau}}y+(a+4b\tau)\sqrt{\rho+2\tau}[y,z].\end{cases}$$

Исследуем асимптотическое поведение решений данной системы при $t\to\pm\infty$. Нетрудно видеть, что

$$\dot y\sim[\Omega,y],\quad \dot z\sim[\Omega+a\sqrt{\rho}y,z].$$

Таким образом, динамика в этом случае является асимптотически почти периодической с периодами $\omega=\sqrt{\Omega^2}$ и ω' $((\omega')2-\omega^2=a^2\rho+2a\sqrt{\rho}\omega\kappa$, $\kappa=\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\langle\Omega,y\rangle}{\omega}$. Отметим, что период ω' зависит от начальных условий.

Случай 2. Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – канонический базис в $\mathfrak{so}(3)$. Положим $\Omega=\omega\mathbf{i}$ и разложим A и X по указанному базису: $A=a_i\mathbf{i}+a_j\mathbf{j}+a_k\mathbf{k}$, $X=x_i\mathbf{i}+x_j\mathbf{j}+x_k\mathbf{k}$, тогда динамические уравнения примут вид:

$$\begin{cases}\dot a_i=\varepsilon\omega x_i(x_ja_k-a_jx_k)+2\alpha(a_ix_i+a_jx_j+a_kx_k)x_i\\ \dot x_i=\varepsilon\omega a_i(a_jx_k-a_kx_j)-2\alpha(a_ix_i+a_jx_j+a_kx_k)a_i\\ \dot a_j=-\omega a_k+\varepsilon\omega x_j(x_ja_k-a_jx_k)+\alpha(a_ix_i+a_jx_j+a_kx_k)x_j\\ \dot x_j=-\omega x_k+\varepsilon\omega a_j(a_jx_k-a_kx_j)-\alpha(a_ix_i+a_jx_j+a_kx_k)a_j\\ \dot a_k=\omega a_j+\varepsilon\omega x_k(x_ja_k-a_jx_k)+\alpha(a_ix_i+a_jx_j+a_kx_k)x_k\\ \dot x_k=\omega x_j+\varepsilon\omega a_k(a_jx_k-a_kx_j)-\alpha(a_ix_i+a_jx_j+a_kx_k)a_k\end{cases}$$

Положим $\mathcal{A}^2=a_i^2+x_i^2$, $a_i=\mathcal{A}\cos\chi$, $x_i=\mathcal{A}\sin\chi$, а также $a_j=a_0\cos\varphi$, $a_k=a_0\sin\varphi$, $x_j=x_0\cos\psi$, $x_k=x_0\sin\psi$ и $\eta=\varphi-\psi$, $\theta=\frac12(\varphi+\psi)$. Отметим, что $\mathcal{A}$ является интегралом движения, динамика χ определяется дифференциальным уравнением $\dot\chi = -\varepsilon\omega a_0 x_0 \sin\eta - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + 2a_0x_0\cos\chi)$, при этом $\frac{d}{dt}a_0^2 = -\frac{d}{dt}x_0^2 = \varepsilon\omega a_0^2x_0^2\sin 2\eta + 2\alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + 2a_0x_0\cos\eta)a_0x_0\cos\eta$. Положим $\mathcal{B}^2 = a_0^2 + x_0^2$, $a_0 = \mathcal{B}\cos\xi$, $x_0 = \mathcal{B}\sin\xi$, $\mathcal{B}$ является интегралом движения. Как следствие,

$$\begin{cases} \dot\xi = -\frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{4}\sin 2\eta\sin 2\xi - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)\cos\eta \\ \dot\chi = -\frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{2}\sin 2\xi\sin\eta - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta) \end{cases}$$

а также

$$\begin{cases} \dot\varphi = \omega - \varepsilon\omega x_0^2\sin^2\eta - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)\sin\eta \\ \dot\psi = \omega - \varepsilon\omega a_0^2\sin^2\eta - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta) \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \dot\eta = \varepsilon\omega\mathcal{B}^2\sin^2\eta\cos 2\xi \\ \dot\theta = \omega - \frac{\varepsilon\mathcal{B}^2}{2}\sin^2\eta - \alpha\sin\eta(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta) \end{cases}$$

Таким образом, динамика допускает два интеграла движения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ и определяется системой дифференциальных уравнений на η, ξ и χ:

$$\begin{cases} \dot\eta = \varepsilon\omega\mathcal{B}^2\sin^2\eta\cos 2\xi \\ \dot\xi = -\frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{4}\sin 2\eta\sin 2\xi - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)\cos\eta \\ \dot\chi = -\frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{2}\sin 2\xi\sin\eta - \alpha(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta) \end{cases}$$

при этом θ выражается через η, χ ξ:

$$\theta = \omega t - \frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{2}\int\sin^2\eta\,dt - \alpha\int\sin\eta(\mathcal{A}^2\sin 2\chi + \mathcal{B}^2\sin 2\xi\cos\eta)\,dt + \theta_0.$$

Общий случай представляет значительный интерес и требует специального численного анализа. Рассмотрим аналитически эволюцию системы при “нехарактерном” нулевом значении параметра $\mathcal{A}$. В этом случае

$$\chi = -\frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{2}\int\sin 2\xi\sin\eta\,dt - \alpha\mathcal{B}^2\int\sin 2\xi\cos\eta\,dt + \chi_0,$$

в то время как

$$\dot\eta = \varepsilon\omega\mathcal{B}^2\sin^2\eta\cos 2\xi, \quad \dot\xi = -\mathcal{B}^2\sin 2\xi(\alpha\cos\eta + \tfrac{\varepsilon\omega}{2}\sin\eta)\cos\eta.$$

Данная система допускает интеграл движения $K = \sin 2\xi\sin\eta[\Theta(\eta)]^{\frac{2\alpha}{\varepsilon\omega}}$ (где $\Theta(\eta)$ – легко вычислимая функция), ввиду этого η удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\dot\eta = \varepsilon\omega\mathcal{B}^2\sin^2\eta\sqrt{1 - \frac{K^2}{\sin^2\eta}[\Theta(\eta)]^{-\frac{4\alpha}{\varepsilon\omega}}},$$

так что при $\mathcal{A}=0$ динамические уравнения решаются в квадратурах. Необходимо также отметить, что эволюция η либо стабилизируется к πn ($n \in \mathbb{Z}$), либо является периодической, и как следствие. негамильтонова динамика, ассоциированная с йордановым узором, является в случае 2 при $\mathcal{A}=0$ в целом асимптотически почти периодической.

В случае $\mathcal{B}=0$ динамика имеет предельные точки при $t \to \pm\infty$, при этом $\eta=\eta_0$, $\Delta\chi=\pm\frac{\pi}{2}$, $\Delta\xi=\pm\frac{\pi}{2}\cos\eta_0$.

Компьютерная визуализация и численный анализ демонстрируют асимптотически почти периодический характер динамики также и при общих $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Поведение системы носит двоякий характер. При начальных значениях η ξ, близких к $\frac{\pi n}{2}$ и $\frac{\pi k}{4}$ ($n,k \in \mathbb{Z}$), соответственно, динамика почти периодична (с достаточной точностью в пределах погрешности численного эксперимента) в переменных (η,ξ) с центром в точке $(\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2})$ ($n,k \in \mathbb{Z}$); по χ также реализуются почти периодические колебания. Размеры осцилляционной зоны уменьшаются с ростом величин $\mathcal{A}^2/\mathcal{B}^2$ $\frac{2\alpha}{\varepsilon\omega}$. При остальных значениях η и ξ наблюдается стабилизация по η к величине $\eta=\frac{\pi}{2}+\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$) при $t \to +\infty$. как следствие асимптотически $\chi \sim (-1)^{n+1}(\xi+\lambda)$ с некоторой константой λ и

$$\dot{\xi}=\alpha(\mathcal{B}^2\sin 2\xi-\mathcal{A}^2\sin(2\xi+2\lambda)).$$

Таким образом, наблюдается стабилизация по ξ к значению ξ^*, удовлетворяющему соотношению $\frac{\sin 2\xi^*}{\sin(2\xi^*+2\lambda)}=\frac{\mathcal{A}^2}{\mathcal{B}^2}$, и по χ $\chi^*=(-1)^{n+1}(\xi^*+\lambda)$. При этом $\theta \sim (\omega-\frac{\varepsilon\omega\mathcal{B}^2}{2})t+\theta^*$.

2.4. Анализ примера. Итоги, нерешенные вопросы и перспективы. С одной стороны, рассмотренные случаи показывают, что негамильтоновы динамические уравнения, ассоциированные с йордановым узором, описывают различное качественное поведение динамических систем (как довольно привычное почти периодическое, так и несколько "периферийное" для алгебраического подхода асимптотически почти периодическое), и в частности, ряд типов систем с негамильтоновым взаимодействием, не охватываемых другими альтернативными средствами описания, такими как формализм изотопических [38] и I-пар [39] (см.ниже). Разумно сформулировать следующую **гипотезу**: гамильтоновы системы с негамильтоновым взаимодействием, задаваемым йордановыми узорами на компактных полупростых алгебрах Ли (являясь, как отмечалось выше, матричными аналогами систем льенаровского типа) реализуют стабилизирующиеся (асимптотически почти периодические) нелинейные колебания. Движение γ_t называется асимптотически почти периодическим, если существует почти периодическое движение γ_t° такое, что $\|\gamma_t-\gamma_t^\circ\| \to 0$ при $t \to \infty$, иными словами, можно говорить об асимптотической стабилизации колебаний.

Для подтверждения этой гипотезы, кроме приведенного примера, отметим, что сумма квадратичных функций Казимира является интегралом движения в общем случае (т.е. для произвольных компактных вещественных полупростых алгебр Ли с йордановыми узорами примеров 1 и 2), и как следствие, в силу компактности поверхностей уровня этой суммы динамика ограниченна.

Кроме того, для квадратичных ("волчковых") гамильтонианов $\mathcal{H}_1(X) = \langle X, TX \rangle$, $\mathcal{H}_2(A) = \langle A, TA \rangle$ (T – симметрический оператор в $\mathfrak{g}$) динамика консервативна *в целом* (т.е. $\frac{d}{dt}(\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2) = 0$) для йордановых узоров в той же общности, что и в предыдущем утверждении. Консервативность в целом сохраняется для указанных гамильтонианов и при добавлении членов порядка выше второго, специального, но достаточно естественного и общего вида. Проверка того, обеспечивает ли конкретный гамильтониан консервативность в целом, осуществляется непосредставенно и не представляет трудностей.

Отметим, что эволюция, определяемая йордановыми узорами, в отличие от динамических уравнений изотопических пар [38], неультраконсервативна, т.е. вообще говоря, $\dot{\mathcal{H}}_1 \neq 0$, $\dot{\mathcal{H}}_2 \neq 0$. Это позволяет предположить, что алгебраический аппарат йордановых узоров на алгебрах Ли может представлять эффективное средство для анализа *асимптотически почти периодических негамильтоновых консервативных в целом, но неультраконсервативных динамических систем*, что существенно для понимания как переходных процессов, так и взаимосвязей между стационарными режимами в системах с автоколебаниями.

В качестве конкретного круга физических проблем можно привести задачи феноменологического описания на (квази)классическом уровне квантовомеханических процессов неупругого рассеяния [49]. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ в этом случае отождествляется с алгеброй внутренних степеней свободы типа изоспина, слабого изоспина и т.д. Негамильтоновы взаимодействия, управляемые йордановыми узорами, по-видимому, появляются в частных случаях общей (интегродифференциальной) теории высокотемпературной сверхпроводимости В.П.Маслова [50,стр.83].

С другой стророны точные формулы, полученные при анализе примера, могут оказаться полезными при конкретном сопоставлении изученной динамики с другими гамильтоновыми и негамильтоновыми динамиками, ассоциированными с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(3)$.

В частности, возникает ряд вопросов, которые полезно сформулировать в завершение работы. (1), если негамильтонова динамика взаимодействия, задаваемая некоторой алгебраической структурой, имеет интеграл движения $\mathcal{L}$, то существуют ли связи (когда, при каких $\mathcal{L}$ и какие) между ней и гамильтоновой динамикой с гамильтонианом $\mathcal{L}$ (и, возможно, "подкрученными" скобками Пуассона)? Этот вопрос мотивирован сравнением негамильтоновых законов Ампера-Лоренца и гамильтонова приближения Дарвина в электромагнетизме. (2), каково поведение негамильтоновой динамики взаимодействия при "включении" внешних полй (устойчивость, перестройки аттракторов) или изменении констант связи (фазовые переходы)? Этот вопрос рассматривался довольно часто в теории диссипативных негамильтоновых систем, но его анализ в случае систем с негамильтоновым взаимодействием, консервативных в целом, в литературе, по-видимому, не встречался. (3), какова взаимная топология in- и out–аттракторов в указанных системах? (4), в настоящий момент неизвестны общие механизмы интегрируемости гамильтоновых систем с негамильтоновым взаимодействием того или иного типа, консервативных в целом.

Некоторые вопросы, смежные с тематикой данной статьи, как то общие симметрические узоры на алгебрах Ли и связанные с ними динамики, а также физически не менее важный случай динамики, ассоциированной с узорами, определяемыми структурой тройной системы Ли, обсуждаются в препринте автора [51] (Ин-т им.Э.Шредингера, декабрь 1994), в котором отмечена связь алгебраической структуры узора и свойств (например, явной интегрируемости) динамики.

Автор благодарит Международный институт математической физики имени Эрвина Шредингера за поддержку и гостеприимство, способствовавшими написанию первоначального варианта работы.

Список литературы

[1] *Арнольд В.И.*, Математические методы классической механики. М., Наука, 1970.

[2] *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.*, Современная геометрия. М., Наука, 1987.

[3] *Лезнов А.Н., Савельев М.В.*, Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. М., Наука, 1985.

[4] *Фоменко А.Т.*, Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М., Изд-во МГУ, 1985.

[5] *Переломов А.М.*, Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М., Наука, 1990.

[6] *Трофимов В.В., Фоменко А.Т.*, Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых динамических систем. М., Факториал, 1995.

[7] *Карасев М.В., Маслов В.П.*, Нелинейные скобки Пуассона: геометрия и квантование. М., Наука, 1992.

[8] *Ампер А.М.*, Электродинамика. М., 1954.

[9] *Gauss C.*, Intensitas vis magnetical terrestres ad mensuram absolutan revocata / Werke, Bd.5, Berlin, 1867, S.81-118.

[10] *Grassman H.*, Neue Theorie der Electrodynamik / Werke, Bd.1, Leipzig, 1902, S.147-160.

[11] *Maxwell J.C.*, Treatise on electricity and magnetism, Oxford, 1904.

[12] *Лоренц Г.А.*, Теория электронов и ее применения к явлениям света и теплового излучения. М., ГТТИ, 1956.

[13] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Теория поля. М., 1960.

[14] *Weber W.*, Electrodynamische Maassbestimmungen über ein allgemeines Grundgesetz der elecurischen Wirkung / Werke, Bd.3, Leipzig, 1893, S.25-215.

[15] *Riemann B.*, Ein Beitrag zur Elektrodynamik / Gesammelte Werke, XIV, Leipzig, 1892.

[16] *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.*, Феинмановские лекции по физике. Т.3, С.39-41; Т.6, С.144. М., Мир, 1977.

[17] *Ильюшин А.А.*, Пластичность. Основы общей математической теории. М., 1963.

[18] *Фок В.А.*, Теория пространства, времени и гравитации. М., 1955.

[19] *Герц Г.*, Принципы механики, изложенные в новой связи. М., 1959.

[20] *Чаплыгин С.А.*, Исследования по динамике неголономных систем. М.-Л., Гостехиздат, 1949.

[21] *Неймарк Ю.И., Фуфаев И.А.*, Динамика неголономных систем. М., Наука, 1967.

[22] *Аппель П.*, Теоретическая механика. М., 1960.

[23] *Парс Л.А.*, Аналитическая динамика. М., 1971.

[24] *Thomson W., Tait P.*, Treatise on natural philosophy. V.1. Cambridge, 1879.

[25] *Граммель Р.*, Гироскоп, его теория и применения. М., 1952.

[26] *Ишлинский А.Ю.*, Механика гироскопических систем. М., 1963.

[27] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.*, Теория колебаний. М., 1959.

[28] *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.*, Математические аспекты классической и небесной маханики / Соврем.пробл.математики. Фундам.направления. Т.3. М., ВИНИТИ, 1985.

[29] *Боголюбов Н.Н.*, Избранные труды. Т.1, Киев, 1969, С.257-410.

[30] *Стокер Дж.*, Нелинейные колебания в механических и электричеких системах. Гл.3, §.13; Гл.5, §§.1,2. М., ИЛ, 1952.

[31] *Булгаков Б.В.*, Колебания. Гл.5В. М., ГИТТЛ. 1954.

[32] *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1958.

[33] *Ланда П.С.*, Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы. М., 1980.

[34] *Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С.*, Математическое моделирование в биофизике. М., 1975.

[35] *Белова Т.И., Кудрявцев А.Е.*, Солитоны и их взаимодействие в классической теории поля // УФН. 1997. Т.167, вып.4. С.377-406.

[36] *Wigner E.*, Do the equations of motion determine the quantum mechanical commutation relations? // Phys. Rev. 1950. V.77. P.711-712.

[37] *Юрьев Д.В.*, Динамическая обратная задача теории представлений и некоммутативная геометрия // Фундам.Прикл.Матем. 1997. Т.3, вып.00. С.000-000 [e-version: funct-an/9507001 (1995)].

[38] *Juriev D.*, Topics in nonHamiltonian (magnetic-type) interactions of classical Hamiltonian dynamical systems. I,II // Russian J.Math.Phys. 1995. V.4. N.3. P.453-460 [e-version: solv-int/9505001 (1995)]; Report RCMPI-96/01 [e-version: mp_arc/95-538 (1995)].

[39] *Juriev D.*, On the nonHamiltonian interaction of two rotators: Report RCMPI-95/01 [e-version: dg-ga/9409004 (1994)].

[40] *Jacobson N.*, Structure and representations of Jordan algebras. Amer.Math.Soc., RI, 1971.

[41] *Koecher M.*, Jordan algebras and their applications, 1962.

[42] *Koecher M.*, An elementary approach to bounded symmetric domains, Houston, 1969.

[43] *Лоос О.*, Симметрические пространства. М., Наука, 1985.

[44] *Де Гроот С.Р., Сатторп Л.Г.*, Электромагнетизм. М., Наука, 1982.

[45] *Камке Э.*, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1965.

[46] *Померанцев Н.М., Рыжков В.М., Скроцкий Г.В.*, Физические основы квантовой магнитометрии. М., 1972.

[47] *Вонсовский С.В.*, Магнетизм. М., 1971.

[48] *Козлов В.В.*, Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой маханике. Изд-во Удмуртского Госун-та, 1995.

[49] *Базь А.И., Зельдович Б.Я., Переломов А.М.*, Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., Наука, 1971.

[50] *Маслов В.П.* // Функц.анал.и его прилож. 1995. Т.29, вып.4. С.80-84.

[51] *Juriev D.*, Symmetric designs on Lie algebras and interactions of hamiltonian systems: Preprint ESI 170 (1994) [e-version: hep-th/9503151 (1995)].

Erwin Schrödinger Institut
für Mathematische Physik, Wien,
Österreich (Austria);
Центр математической физики и информатики
"Таласса Этерия"