TRANSITION DE PHASE POUR LE MODÈLE DE KAC EN DIMENSION DEUX.

THIERRY BODINEAU

Abstract : We establish the phase diagram of the local mean field model, called Kac model. This enables us to solve a conjecture made by Kac [Ka66].

Résumé : Dans cet article, on établit le diagramme de phase pour le modèle de champ moyen local. On résout ainsi une conjecture faite par Kac [Ka66].

1. Introduction

Pour étudier de façon rigoureuse certains problèmes de transition de phase et en particulier pour justifier la théorie de van der Waals de la transition liquide vapeur, Kac a introduit un modèle de champ moyen local [Ka66]. La méthode employée par Kac consiste à étudier les propriétés de ce modèle à l'aide de l'opérateur de transfert associé. En effet, des quantités comme l'énergie libre ou la longueur de corrélation sont liées au spectre de cet opérateur; la connaissance du spectre permet donc de retrouver les propriétés physiques du système. Comme l'ont montré Brunaud et Helffer [BruHe91], une telle approche fournit une caractérisation complète du cas unidimensionnel (cf aussi Bodineau [Bo97]). Cependant l'étude du spectre de cet opérateur dans le cas des dimensions supérieures est beaucoup plus difficile. Nous renvoyons le lecteur au cours de Helffer [He95] où différents résultats sur les opérateurs en grandes dimensions sont détaillés.

Pour généraliser le travail de Kac aux dimensions supérieures, Lebowitz et Penrose [LP66] ont développé des méthodes qui s'affranchissent de l'opérateur de transfert. Cependant leur étude ne reste valable que dans la limite de champ moyen et ne donne pas d'information précise quand la portée des interactions est finie.

Ces dernières années des approches probabilistes inspirées par la démarche de Lebowitz et Penrose ont permis une bonne compréhension du modèle de champ moyen local. En particulier l'existence d'une transition de phase en dimension supérieure à 2 a été prouvée par Cassandro, Presutti [CP96] et Bovier, Zahradnìk [BZ96] (cf aussi [BP96]).

Dans cet article, on s'intéresse à une des variantes du modèle de champ moyen appelée par Kac modèle de type A (cf [Ka66]). Kac a conjecturé qu'une transition de phase apparaît pour toute température inférieure à une température critique, dès que le paramètre de champ moyen est suffisamment petit. La méthode de

Key words and phrases. Transfert operator, Ising system, Peierls argument.

preuve utilisait le formalisme de l'opérateur de transfert; Kac avait aussi conjecturé que la transition de phase était équivalente à la dégénérescence asymptotique de la première valeur propre de l'opérateur de transfert. Cependant une preuve directe de la transition de phase à l'aide de l'opérateur de transfert semble être difficile.

Nous procédons de façon différente en adaptant les méthodes probabilistes développées par Cassandro et Presutti [CP96] dans le cas d'interactions isotropes. Une fois la transition de phase établie, nous en déduisons un contrôle du splitting et prouvons ainsi la conjecture de Kac (concernant le splitting) pour certaines valeurs de la température. L'intérêt de cette approche est de fournir un exemple explicite où la méthode de Peierls donne des propriétés spectrales d'opérateurs en grande dimension. En effet, l'intuition, issue du formalisme de l'opérateur de transfert, permet de prédire que le comportement asymptotique de certains opérateurs du type Schrödinger sur un réseau de dimension d peut se déduire de résultats sur des systèmes de spins classiques sur un réseau de dimension $d+1$. Cette intuition, déja présente dans [Fr76], a été précisée plus récemment par B. Helffer [He96], [He97] dans le cas $d \geq 2$: à l'aide des estimations infra-rouge en dimension $d+1 \geq 3$, on déduit un contrôle de l'écart entre les deux premières valeurs propres pour certains opérateurs de Schrödinger quand la dimension du réseau est d. Cependant, la véritable correspondance avec les systèmes classiques s'avère délicate à réaliser rigoureusement (cf [Fr76] p. 233). Dans le cas particulier du modèle de type A, nous retrouvons des difficultés similaires à celles qui apparaissent dans la preuve de Fröhlich [Fr76] quand on passe de l'opérateur à un système de spins avec interactions non isotropes. A l'aide d'une procédure de renormalisation, nous parvenons à contrôler ces problèmes ce qui permet d'obtenir un contrôle de l'écart entre les deux premières valeurs propres.

Ce papier est structuré de la façon suivante; dans une première partie nous décrivons le modèle et les résultats obtenus, puis dans une seconde partie nous prouvons partiellement la conjecture de Kac sur le splitting. La fin du texte est consacrée à la preuve de la transition de phase à l'aide de l'argument de Peierls. La troisième partie décrit les étapes nécessaires pour obtenir l'estimée de Peierls. Ces différentes étapes seront prouvées dans la quatrième et la cinquième partie où un argument emprunté à [CP96] joue un rôle essentiel.

Remerciements : Je voudrais remercier tout particulièrement B. Helffer qui m'a beaucoup aidé dans la réalisation de ce travail par de nombreuses discussions et une relecture attentive. Je souhaite aussi remercier E. Presutti pour m'avoir expliqué les résultats de [CP96].

Nous remercions aussi la CEE qui a partiellement soutenu cette recherche par le programme TMR - Network Postdoctoral training programme in partial differential equations and application in quantum mechanics-.

2. Description du modèle

Le modèle considéré est constitué de spins modélisés par une famille de variables aléatoires $\{S_i\}_{i\in\mathbb{Z}^2}$ à valeurs dans $\{-1,1\}$. Soit J une fonction paire, positive, lipschitzienne vérifiant $\int_{\mathbb{R}} J(r)\,dr = 2$. On définit alors la famille de potentiels de

Kac $\{J_\gamma\}$ indexés par le paramètre $\gamma > 0$ par

$$\forall r \in \mathbb{R}, \qquad J_\gamma(r) = \gamma J(\gamma r). \tag{2.1}$$

Cette définition généralise les hypothèses considérées par Kac; nous reviendrons par la suite sur le choix particulier fait par Kac.

Soit $\gamma > 0$ un paramètre fixé. On définit le potentiel ferromagnétique $\mathbb{J}_\gamma$ sur $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ par

$$\mathbb{J}_\gamma(k,l,k',l') = J_\gamma(k-k')\mathcal{J}(l,l'), \tag{2.2}$$

avec

$$\mathcal{J}(l,l') = \delta_{l,l'} + \frac{1}{2}(\delta_{l,l'+1} + \delta_{l,l'-1}).$$

Soit V un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$; l'Hamiltonien de la configuration $S_V = \{S_i\}_{i\in V}$ appartenant à $\{-1,1\}^V$ avec conditions au bord S_{V^c} s'écrit

$$H_{V,\gamma}(S_V|S_{V^c}) = -\frac{1}{2}\sum_{r,s\in V} \mathbb{J}_\gamma(r,s)S_rS_s - \sum_{r\in V, s\in V^c} \mathbb{J}_\gamma(r,s)S_rS_s. \tag{2.3}$$

Pour tout paramètre β positif, on définit une mesure de probabilité sur $\{-1,1\}^V$ associée à cet Hamiltonien

$$\mu_{\beta,\gamma,V}(S_V|S_{V^c}) = \frac{1}{Z_{\beta,\gamma}(V)}\exp(-\beta H_{V,\gamma}(S_V|S_{V^c})),$$

où $Z_{\beta,\gamma}(V)$ est une constante de normalisation. Les mesures $\{\mu_{\beta,\gamma,V}\}_V$ s'appellent des spécifications locales, elles permettent de définir les mesures de Gibbs sur $\{-1,1\}^{\mathbb{Z}^d}$. On dit que $\mu_{\beta,\gamma}$ est une mesure de Gibbs si elle satisfait les équations de Dobrushin-Landford-Ruelle

$$\forall V \subset \mathbb{Z}^d, \qquad \mu_{\beta,\gamma}\Big(\mu_{\beta,\gamma,V}(\cdot|S_{V^c})\Big) = \mu_{\beta,\gamma}(\cdot).$$

Le problème consiste à déterminer le diagramme de phase du système: pour γ petit mais non nul, on veut savoir si il existe plusieurs mesures de Gibbs. On introduit la température critique $\beta_c = \frac{1}{4}$.

Théorème 2.1. *Pour tout β supérieur à β_c, il existe un paramètre strictement positif γ_β tel que pour tout γ inférieur à γ_β le modèle de Kac présente une transition de phase, c'est-à-dire qu'il existe au moins deux mesures de Gibbs extrémales distinctes.*

La preuve s'inspire des idées développées par Cassandro et Presutti [CP96].

Nous décrivons maintenant le cas particulier $J(r) = \exp(-|r|)$ considéré par Kac. Dans son cours [Ka66], Kac a montré que ce modèle peut être étudié à l'aide de l'opérateur de transfert

$$K_\gamma^{(M)} = \exp(-\frac{1}{2}\gamma q(x))\exp(\gamma\Delta_M)\exp(-\frac{1}{2}\gamma q(x)),$$

avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^M, \qquad \gamma q(x) = \frac{1}{2}\tanh(\frac{\gamma}{2})\sum_{k=1}^M x_k^2 - \sum_{k=1}^M \log\cosh\Big(\sqrt{\frac{\gamma\beta}{2}}(x_k + x_{k+1})\Big),$$

on fera la convention $x_{M+1} = x_1$.

Dans la limite où γ tend vers 0, le comportement du système ne dépend que du potentiel

$$\tilde{q}(x) = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{4} x_k^2 - \log\cosh\Big(\sqrt{\frac{\beta}{2}}(x_k + x_{k+1})\Big).$$

On retrouve la valeur critique $\beta_c = \frac{1}{4}$ donnée dans l'introduction. En effet, pour $\beta > \beta_c$, la fonction

$$x \to \frac{1}{4}x^2 - \log\cosh\Big(\sqrt{2\beta}x\Big)$$

possède deux minima, tandis que si $\beta < \beta_c$ cette fonction est alors strictement convexe.

Kac avait envisagé la démonstration du théorème 2.1 comme la conséquence d'une conjecture sur les valeurs propres de l'opérateur de transfert $K_\gamma^{(M)}$.

Conjecture de Kac : Pour tout β supérieur à β_c, il existe un paramètre strictement positif γ_β tel que pour tout γ inférieur à γ_β on ait

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\mu_2(\gamma, M)}{\mu_1(\gamma, M)} = 1,$$

où $\mu_1(\gamma, M)$ et $\mu_2(\gamma, M)$ sont les deux premières valeurs propres de $K_\gamma^{(M)}$.

Nous procédons différemment et prouvons à l'aide du théorème 2.1 le résultat suivant

Théorème 2.2. *Soit $\{\gamma_n\}_n$ une suite dans $(0,1]$ tendant vers 0. Il existe $\mathcal{B}$, un sous-ensemble de $]\beta_c, \infty[$ dont le complémentaire dans $]\beta_c, \infty[$ est au plus dénombrable tel que pour tout β dans $\mathcal{B}$ et tout n supérieur à une constante n_β ne dépendant que de β, on ait*

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\mu_2(\gamma_n, M)}{\mu_1(\gamma_n, M)} = 1.$$

En fait Kac avait même prédit [KaTho66] que l'écart $\mu_2(\gamma_n, M) - \mu_1(\gamma_n, M)$ tendait exponentiellement vite vers 0 quand M tend vers l'infini. La méthode utilisée dans ce papier ne permet pas d'estimer cet écart.

3. Conjecture de Kac

Cette section est consacrée à la preuve du théorème 2.2. Dans toute cette preuve, γ désigne un élément de la suite $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tous entiers positifs N et M, on note $\Lambda_{N,M}$ le rectangle à N colonnes et M lignes inclus dans $\mathbb{Z}^2$. On considère $\mu_{\beta,\gamma,\Lambda_{N,M}}$ la mesure de Gibbs sur $\Lambda_{N,M}$ avec conditions périodiques au bord. On définit aussi la mesure de Gibbs $\mu^+_{\beta,\gamma}$ (resp $\mu^-_{\beta,\gamma}$) obtenue par limite thermodynamique des mesures $\mu^+_{\beta,\gamma,\Lambda_{N,N}}$ avec conditions

+ (resp −) au bord (cf Ellis [Ell85] p.158).

On souhaite maintenant prouver que

$$\lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\mu_{\beta,\gamma,\Lambda_{N,M}} = \frac{1}{2}(\mu^+_{\beta,\gamma}+\mu^-_{\beta,\gamma}).$$

Par compacité, on peut extraire des sous suites convergeant vers une mesure de Gibbs invariante par translation. Il suffit donc de prouver l'unicité de cette limite. On fixe γ et on suppose que β est régulier, nous reviendrons sur cette hypothèse par la suite. Dans ce cas, le résultat de Pfister [Pf87] (théorème 4) (voir aussi [Ell85] p.133 théorème IV.8.2) est applicable et toute mesure de Gibbs invariante par translation est combinaison linéaire de $\mu^+_{\beta,\gamma}$ et $\mu^-_{\beta,\gamma}$. Par symétrie de $\mu_{\beta,\gamma,\Lambda_{N,M}}$, on sait que

$$\forall N, M \in \mathbb{N}, \qquad \mu_{\beta,\gamma,\Lambda_{N,M}}(S_0) = 0.$$

Par conséquent toute mesure limite $\mu_{\beta,\gamma}$ est nécessairement égale à $\frac{1}{2}(\mu^+_{\beta,\gamma}+\mu^-_{\beta,\gamma})$ et est donc unique.

Revenons maintenant sur l'hypothèse faite sur β, on dit que β est régulier si la pression

$$f(\beta) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\log\left(\sum_{S_{\Lambda_{N,N}}}\exp(-\beta H_{\Lambda_{N,N},\gamma}(S_\Lambda|+))\right),$$

est dérivable en β. D'après [Pf87], on sait que à γ fixé , il existe au plus un nombre dénombrable de β non réguliers. On note $\mathcal{B}$ l'intersection pour tout n des β réguliers associés à μ_{β,γ_n}. Dans la suite de la preuve, on suppose que β appartient à $\mathcal{B}$.

L'existence de la limite $\mu_{\beta,\gamma}$ étant établie, la corrélation entre les spins aux sites $(0,0)$ et $(l,0)$ pour la mesure obtenue à partir de $\mu_{\beta,\gamma,\Lambda_{N,M}}$ s'écrit

$$\mu_{\beta,\gamma}(S_0S_l) = \lim_{M\to\infty}\lim_{N\to\infty}\mu_{\beta,\gamma,\Lambda_{N,M}}(S_0S_l). \tag{3.1}$$

En utilisant l'opérateur de Kac, on vérifie facilement que

$$\lim_{N\to\infty}\mu_{\beta,\gamma,\Lambda_{N,M}}(S_0S_l) = \sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\mu_j(\gamma,M)}{\mu_1(\gamma,M)}\right)^l c_j^2, \tag{3.2}$$

où les c_j sont des constantes dépendant uniquement des vecteurs propres de $K_\gamma^{(M)}$ et pas du paramètre l. En remarquant que

$$\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\mu_j(\gamma,M)}{\mu_1(\gamma,M)}c_j^2 \le \lim_{N\to\infty}\mu_{\beta,\gamma,\Lambda_{N,M}}(S_0S_1) \le 1,$$

on déduit donc de (3.2) que

$$\lim_{N\to\infty}\mu_{\beta,\gamma,\Lambda_{N,M}}(S_0S_l) \le \left(\frac{\mu_2(\gamma,M)}{\mu_1(\gamma,M)}\right)^{l-1}. \tag{3.3}$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\liminf_{M\to\infty} \frac{\mu_2(\gamma, M)}{\mu_1(\gamma, M)} < c < 1.$$

Le passage à la limite thermodynamique (3.1) impliquerait alors

$$\mu_{\beta,\gamma}(S_0 S_l) \leq c^{l-1},$$

c'est-à-dire

$$\lim_{l\to\infty} \mu_{\beta,\gamma}(S_0 S_l) = 0.$$

En utilisant le fait que $\mu_{\beta,\gamma} = \frac{1}{2}(\mu^+_{\beta,\gamma} + \mu^+_{\beta,\gamma})$, on obtiendrait

$$\lim_{l\to\infty} \mu^+_{\beta,\gamma}(S_0 S_l) = 0.$$

Montrons qu'un tel résultat conduirait à une contradiction. Le théorème 2.1 permet d'affirmer que pour tout β supérieur à β_c et γ suffisamment petit

$$\mu^+_{\beta,\gamma}(S_0) > 0. \tag{3.4}$$

Le système étant ferromagnétique, l'inégalité FKG (cf. Ellis [Ell85], p.143) implique

$$\mu^+_{\beta,\gamma}(S_0 S_l) \geq [\mu^+_{\beta,\gamma}(S_0)]^2 > 0. \tag{3.5}$$

La relation (3.4) implique que le dernier terme est strictement positif. On obtiendrait alors une contradiction, ceci permet de conclure que

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\mu_2(\gamma, M)}{\mu_1(\gamma, M)} = 1.$$

□

4. Preuve du théorème 2.1

Nous prouvons maintenant le théorème 2.1 pour des potentiels du type de ceux décrits dans l'introduction. La démonstration est divisée en plusieurs étapes, le point central consiste à considérer le système à une échelle différente, dite échelle mésoscopique, afin de pouvoir appliquer l'argument de Peierls. En effet, on ne peut pas se contenter de se restreindre aux interactions aux plus proches voisins car dans le cas du modèle de Kac, l'interaction entre 2 sites est de l'ordre de γ : l'application naïve de l'argument de Peierls ne suffirait pas à montrer qu'il y a bien transition de phase au dela de la température critique. Il faut donc utiliser une procédure de renormalisation et transposer l'argument de Peierls à des blocs de spins définis à une échelle mésoscopique.

4.1. **Potentiels de portée finie.** On commence par se ramener au cas d'interactions de portée finie. Supposons que le théorème 2.1 soit valable dans le cas d'interactions de portée finie et étendons le au cas d'interactions de portée infinie.

Soit R une constante positive, on introduit $\mathbb{J}_\gamma^R$ le potentiel de portée finie déduit de $\mathbb{J}_\gamma$ par troncature

$$\mathbb{J}_\gamma^R(k,l,k',l') = \gamma J(\gamma(k-k'))1_{\{|k-k'|\leq R\gamma^{-1}\}}\mathcal{J}(l,l').$$

Soit β fixé supérieur à β_c, on choisit R suffisamment grand tel que, pour γ petit, on ait

$$\beta > \frac{1}{\sum_{(k,l)\in\mathbb{Z}^2}\mathbb{J}_\gamma^R(k,l,0,0)} > \beta_c = \frac{1}{4}.$$

D'après le théorème 2.1, il se produit une transition de phase pour la mesure de Gibbs associée à $\mathbb{J}_\gamma^R$. Par l'inégalité ferromagnétique GKS (cf Ellis [Ell85] p.147), on en déduit qu'il y a aussi une transition de phase pour la mesure de Gibbs associée à $\mathbb{J}_\gamma$.

Montrons maintenant le théorème 2.1 dans le cas d'un potentiel de portée finie, c'est à dire avec J à support compact et Lipschitzienne. On peut, sans restriction, choisir $[-1,1]$ comme support de J; la preuve serait identique pour tout support du type $[-R,R]$.

4.2. **Echelle mésoscopique.** Dans cette partie, on introduit de nouvelles notations correspondant à des quantités de l'échelle mésoscopique.

Soit ℓ un entier tel que $1 \ll \ell \ll \gamma^{-1}$.

Définition 4.1. *Pour tout x de la forme $x=(i\ell,j)$ avec i,j deux entiers. On note $\bar{x}$ le rectangle de $\mathbb{Z}^2$ défini par*

$$\bar{x} = \{(k,k') \mid -\frac{\ell}{2} < k - i\ell \leq \frac{\ell}{2}; k' = j\}.$$

L'aimantation moyenne du rectangle $\bar{x}$ est alors

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\ell}\sum_{r\in\bar{x}} S_r.$$

L'échelle mésoscopique ne fait intervenir que les moyennes locales de l'aimantation $\sigma_{\bar{x}}$. Dans toute la suite, les variables S représenteront des spins à valeurs ± 1, les variables σ représenteront l'aimantation moyenne à valeurs discrètes dans $[-1,1]$ et m correspondra à l'aimantation moyenne quand ℓ tend vers l'infini, m prendra donc des valeurs continues dans $[-1,1]$.

On réalise un pavage de $\mathbb{Z}^2$ avec des rectangles du type $\bar{x}$. Cette procédure de renormalisation va permettre de réécrire les spécifications locales en termes de l'aimantation moyenne $\sigma_{\bar{x}}$ de chaque rectangle.

La première étape consiste à réécrire l'Hamiltonien. La fonction J étant Lipschitzienne, il existe une constante c_1 telle que, pour tous x,y,s et r de $\mathbb{Z}^2$ avec r appartenant à $\bar{x}$ et s appartenant à $\bar{y}$

$$|\mathbb{J}_\gamma(r,s) - \mathbb{J}_\gamma(x,y)| \leq c_1\gamma^2\ell.$$

Pour tout sous-ensemble fini V de $\mathbb{Z}^2$ réunion de rectangles $\bar{x}$, la relation ci-dessus conduit à

$$\left| H_{V,\gamma}(S_V|S_{V^c}) + \frac{\ell^2}{2} \sum_{\bar{x},\bar{y} \subset V} \mathbb{J}_\gamma(x,y)\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}} + \ell^2 \sum_{\bar{x}\subset V, \bar{y}\subset V^c} \mathbb{J}_\gamma(x,y)\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}} \right| \leq c_1 N(V)\gamma\ell^2, \tag{4.1}$$

où $N(V)$ est le nombre de rectangles dans V.

L'inégalité précédente permet de comparer l'Hamiltonien avec des quantités de l'échelle mésoscopique, il ne reste plus qu'à analyser le comportement de chaque $\sigma_{\bar{x}}$ quand ℓ tend vers l'infini. Le fait de moyenner un grand nombre de variables aléatoires impose d'introduire l'entropie. Soit $\sigma \in [-1,1]$ tel que $\ell\frac{\sigma+1}{2}$ appartienne à $\mathbb{Z}$, un calcul explicite donne

$$P_\ell\left(\frac{1}{\ell}\sum_{r\in\bar{x}} S_r = \sigma\right) = 2^{-\ell}\begin{pmatrix} \ell \\ \frac{1+\sigma}{2}\ell \end{pmatrix},$$

où P_ℓ est la probabilité produit $\otimes_\ell(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1})$ sur $\{-1,1\}^\ell$. On peut alors définir l'entropie, notée I (cf [Ell85] p. 38)

$$\forall m \in [-1,1], \qquad I(m) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\ell\to\infty}\frac{1}{\ell}\log P_\ell\left(\frac{1}{\ell}\sum_{r\in\bar{x}} S_r \in [m-\varepsilon, m+\varepsilon]\right).$$

En utilisant la formule de Stirling, on montre classiquement que I s'écrit

$$\forall m \in [-1,1], \qquad I(m) = \frac{1+m}{2}\log(1+m) + \frac{1-m}{2}\log(1-m);$$

on obtient aussi l'équivalent suivant

$$P_\ell\left(\frac{1}{\ell}\sum_{r\in\bar{x}} S_r = \sigma\right) = \exp\left(-\ell I(\sigma) + \ell O(\frac{\log \ell}{\ell})\right).$$

Comme on le verra par la suite (cf (4.6)), il est naturel de considérer une énergie mésoscopique définie par

$$\begin{aligned} E_{V,\tau}(\sigma_V|\sigma_{V^c}) = -\frac{1}{2}\sum_{\bar{x},\bar{y}\subset V} \ell\mathbb{J}_\gamma(x,y)\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}} - &\sum_{\bar{x}\subset V,\bar{y}\subset V^c} \ell\mathbb{J}_\gamma(x,y)\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}} \\ &+ \sum_{\bar{x}\subset V} \beta^{-1} I(\sigma_{\bar{x}}), \end{aligned} \tag{4.2}$$

où $\tau = \ell\gamma$ est un nouveau paramètre caractéristique du système. Le seul paramètre intervenant dans l'expression ci dessus est le produit $\ell\gamma$. En remarquant que

$$\sum_{\bar{x}\subset V,\bar{y}} \ell\mathbb{J}_\gamma(x,y)\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_{(i\ell,j)\in V;(i'\ell,j')} \ell\gamma J(\ell\gamma(i-i'))\mathcal{J}(j,j')\sigma_{\bar{x}}^2,$$

on obtient alors la relation

$$\sum_{\bar{x}\subset V,\bar{y}} \ell\mathbb{J}_\gamma(x,y)\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_{\bar{x}\subset V}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} 2\ell\gamma J(\ell\gamma i)\right)\sigma_{\bar{x}}^2 = \sum_{\bar{x}\subset V} j_\tau \sigma_{\bar{x}}^2, \tag{4.3}$$

avec

$$\forall \tau > 0, \qquad j_\tau = 2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \tau J(\tau|i|).$$

La somme de Riemann qui définit j_τ converge quand τ tend vers 0

$$\lim_{\tau \to 0} j_\tau = 2 \int_{\mathbb{R}} dr\ J(r) = 4.$$

En utilisant (4.3) et l'identité ci dessous

$$-\sigma_{\bar{x}}\sigma_{\bar{y}} = \frac{1}{2}(\sigma_{\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}})^2 - \frac{1}{2}(\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\bar{y}}^2), \tag{4.4}$$

on peut réécrire l'énergie (4.2) sous la forme

$$\begin{aligned} E_{V,\tau}(\sigma_V|\sigma_{V^c}) =& \frac{1}{4}\sum_{\bar{x},\bar{y}\subset V} \ell \mathbb{J}_\gamma(x,y)(\sigma_{\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}})^2 + \frac{1}{2}\sum_{\bar{x}\subset V,\bar{y}\subset V^c} \ell \mathbb{J}_\gamma(x,y)(\sigma_{\bar{x}} - \sigma_{\bar{y}})^2 \\ &+ \sum_{\bar{x}\subset V} \beta^{-1} I(\sigma_{\bar{x}}) - \frac{1}{2} j_\tau \sigma_{\bar{x}}^2 - C_V(\sigma_{V^c}). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Le terme $C_V(\sigma_{V^c}) = \frac{1}{2}\sum_{\bar{x}\subset V}\sum_{\bar{y}\subset V^c} \ell J_\gamma(x,y)\sigma_{\bar{y}}^2$ ne contient que des termes de bord et disparaîtra dans l'expression de la mesure de Gibbs conditionnelle (4.6). A part ce terme de bord, la formule (4.5) se compose de 2 types de termes : des termes quadratiques d'interaction et des termes correspondant au potentiel $f_{\beta,\tau}$

$$\forall m \in [-1,1], \qquad f_{\beta,\tau}(m) = \beta^{-1} I(m) - \frac{1}{2} j_\tau m^2.$$

Si $\beta > \beta_c$, la fonction $f_{\beta,\tau}$ possède deux minima symétriques distincts $\pm m_{\beta,\tau}$ pour tout τ suffisamment petit. Quand τ tend vers 0, le minimum $m_{\beta,\tau}$ tend vers le minimum de $f_{\beta,0}$ noté m_β.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire une version mésoscopique des spécifications locales. On définit $\{S_V \Rightarrow \sigma_V\}$ comme l'ensemble des configurations S_V dont la moyenne sur chaque rectangle $\bar{x}$ est $\sigma_{\bar{x}}$. En utilisant (4.5), on peut écrire la mesure de Gibbs conditionnelle sur V, sachant que les conditions au bord S_{V^c} sont compatibles avec σ_{V^c}

$$\begin{aligned} \mu_{\beta,\gamma,V}(\{S \Rightarrow \sigma_V\}|S_{V^c}) =& \frac{\exp(-\beta\ell E_{V,\tau}(\sigma_V|\sigma_{V^c}))}{\sum_{\sigma_V}\exp(-\beta\ell E_{V,\tau}(\sigma_V|\sigma_{V^c}))} \\ & \exp\left(\ell N(V)\Big(\varepsilon(\gamma,\tau) + O(\frac{\log \ell}{\ell})\Big)\right), \end{aligned} \tag{4.6}$$

où la fonction ε tend vers 0 quand γ et τ tendent vers 0. Le second terme d'erreur tend vers 0 quand ℓ tend vers l'infini. Par la suite, le paramètre τ sera proche de 0, ce qui imposera une condition entre ℓ et γ.

On peut maintenant énoncer un théorème qui donne un contrôle de (4.6) quand ℓ tend vers l'infini.

Théorème 4.1. *Soit V une réunion de rectangles $\bar{x}$ et A un sous-ensemble fermé de l'ensemble des configurations $\{m_V = \{m_{\bar{x}}\}_{\bar{x}\in V} \mid \forall \bar{x} \subset V, \quad m_{\bar{x}} \in [-1,1]\}$. Alors pour toute configuration extérieure σ_{V^c}*

$$\left| \log\left(\sum_{\sigma_V\in A} \exp(-\beta\ell E_{V,\tau}(\sigma_V|\sigma_{V^c}))\right) + \beta\ell \inf_{m_V\in A} E_{V,\tau}(m_V|\sigma_{V^c})\right| \le \ell N(V)\varepsilon(\ell),$$

où l'infimum est pris pour des configurations m_V à valeurs continues. On note $N(V)$ le nombre de rectangles $\bar{x}$ dans V et la fonction $\varepsilon(\ell)$ tend vers 0 quand ℓ tend vers l'infini (le paramètre τ restant fixé). La fonction ε est indépendante de A et de σ_{V^c}.

Preuve : On procède en 2 étapes.
Etape 1 : Pour la borne inférieure, on a

$$\log\left(\sum_{\sigma_V\in A}\exp(-\beta\ell E_{V,\tau}(\sigma_V|\sigma_{V^c}))\right)\geq -\beta\ell\inf_{\sigma_V\in A}E_{V,\tau}(\sigma_V|\sigma_{V^c}).$$

On souhaite maintenant passer des blocs de spins discrets aux blocs de spins continus. L'erreur est de l'ordre de $\frac{1}{\ell}$ sur chaque $\bar{x}$. En utilisant le fait que $f_{\beta,\tau}$ est uniformément continue sur $[-1,1]$, on en déduit que

$$\log\left(\sum_{\sigma_V\in A}\exp(-\beta\ell E_{V,\tau}(\sigma_V|\sigma_{V^c}))\right)\geq -\beta\ell\inf_{m_V\in A}E_{V,\tau}(m_V|\sigma_{V^c})-\ell N(V)\varepsilon(\ell).$$

Etape 2 : Pour la borne supérieure, il suffit de majorer par le nombre $\ell^{N(V)}$ de configurations mésoscopiques

$$\sum_{\sigma_V\in A}\exp(-\beta\ell E_{V,\tau}(\sigma_V|\sigma_{V^c}))\leq \ell^{N(V)}\exp(-\beta\ell\inf_{m_V\in A}E_{V,\tau}(m_V|\sigma_{V^c})).$$

Ceci donne le résultat. □

4.3. **Procédure de renormalisation.** Dans cette partie, nous définissons la notion de contours à l'échelle mésoscopique. Nous montrons ensuite que la transition de phase (théorème 2.1) peut s'obtenir à l'aide d'une inégalité sur la probabilité des contours.

Soit $L>0$ une constante qui sera fixée ultérieurement. On définit le cube C_0 par $\mathbb{Z}^2\cap[-L\gamma^{-1},L\gamma^{-1}[\times[-L,L[$. On partitionne $\mathbb{Z}^2$ en blocs C, chacun étant déduit de C_0 par translation. Pour tout paramètre $\delta>0$, on introduit une autre partition de $\mathbb{Z}^2$ à l'aide des blocs $\mathcal{C}^\delta$ déduits par translation du bloc $C_0^\delta=\mathbb{Z}^2\cap[-\delta\gamma^{-1},\delta\gamma^{-1}[\times\{0\}$. Afin de se ramener à un système de "spins", on associe à chaque bloc C un label $\eta(C)$; on constitue ainsi des blocs de spins. Soit $\zeta>0$ un paramètre qui sera fixé ultérieurement. On définit

$$\eta(C)=\begin{cases}1 & \text{si } \forall\mathcal{C}^\delta\subset C \quad |\frac{\gamma}{2\delta}\sum_{i\in\mathcal{C}^\delta}S_i-m_\beta|\leq\zeta,\\ -1 & \text{si } \forall\mathcal{C}^\delta\subset C \quad |\frac{\gamma}{2\delta}\sum_{i\in\mathcal{C}^\delta}S_i+m_\beta|\leq\zeta,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

On remarque que les paramètres τ et ℓ n'interviennent pas dans la définition des blocs de spins.

Pour β supérieur à β_c, le problème de la transition de phase se réduit, comme dans l'argument de Peierls, à démontrer une brisure de symétrie dès que γ est inférieur à une certaine constante γ_0, c'est-à-dire que pour tout $\gamma<\gamma_0$, il existe une mesure de Gibbs $\mu^+_{\beta,\gamma}$ telle que

$$\mu^+_{\beta,\gamma}\Big(\{\eta(C_0)\leq 0\}\Big)<\frac{1}{2},\tag{4.7}$$

le bloc C_0 et son label dépendent des paramètres L, ζ et δ qui seront ajustés par la suite. Si cette mesure était unique alors un argument de symétrie permettrait d'affirmer que

$$\mu^+_{\beta,\gamma}(\eta(C_0) = 1) = \mu^+_{\beta,\gamma}(\eta(C_0) = -1).$$

Il y aurait donc une contradiction. Pour prouver le théorème 2.1, il suffit donc de démontrer (4.7).

La démonstration de (4.7) fait appel à la notion de contours.

Définition 4.2. *Un bloc C est dit correct si $\eta(C)$ est non nul et a la même valeur pour tous les blocs adjacents. Un contour est alors un ensemble (maximal) connexe de blocs du complémentaire de l'ensemble des blocs corrects.*

Soit Λ un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$, on note $\mu^+_{\beta,\gamma,\Lambda}$ la mesure de Gibbs sur Λ avec des conditions au bord de label 1 notées S^+. Une configuration S_Λ appartient à l'ensemble $\{\eta(C_0) \le 0\}$ si cette configuration produit un contour Γ entourant C_0

$$\mu^+_{\beta,\gamma,\Lambda}\Big(\{\eta(C_0) \le 0\}\Big) \le \sum_{\Gamma \ni 0} \mu^+_{\beta,\gamma,\Lambda}(\Gamma). \tag{4.8}$$

La notation $\Gamma \ni 0$ signifie que l'on somme sur tous les contours Γ entourant C_0. Il suffit donc d'obtenir une majoration uniforme pour tout Λ de la probabilité d'avoir un contour Γ. Nous allons prouver que

Lemme 4.1. *Il existe des constantes strictement positives $c, \gamma_0, \zeta, \delta$ et L telles que, pour tout contour Γ inclus dans un sous-ensemble Λ de $\mathbb{Z}^2$ et pour tout $\gamma < \gamma_0$, on ait*

$$\mu^+_{\beta,\gamma,\Lambda}(\Gamma) \le \exp(-\frac{c}{\gamma}|\Gamma|),$$

où $|\Gamma|$ est le nombre de blocs C inclus dans Γ.

En appliquant ce lemme à l'inégalité (4.8), on montre par un argument combinatoire (cf [CP96]) que pour γ suffisamment petit l'inégalité (4.7) est vérifiée. Ce lemme sera prouvé dans la section suivante.

5. Inégalité de Peierls (lemme 4.1)

5.1. **Réduction à un principe variationnel.** Dans cette section, nous montrons comment réduire à un principe variationnel l'inégalité du lemme 3.1. La première étape consiste, à l'aide d'un conditionnement, à se ramener à évaluer un événement localisé autour du contour Γ. Les paramètres ζ, τ, δ et L seront fixés au cours de la preuve.

Les interactions étant anisotropes, on introduit une distance sur $\mathbb{Z}^2$ dépendant de γ

$$\mathrm{dist}_\gamma((i,j);(i',j')) = \min(\gamma|i-i'|, |j-j'|).$$

On définit la frontière $\partial\Gamma$ d'un contour Γ comme la réunion des rectangles $\bar{x}$ dont la distance à Γ est dans l'intervalle $[L-10, L]$. De plus, on note $\bar{\Gamma}$ la réunion des rectangles $\bar{x}$ dont la distance à Γ est inférieure à $L-10$. Par définition de Γ, on sait que l'aimantation moyenne dans une partie connexe de $\partial\Gamma$ est de signe constant et est proche de m_β ou $-m_\beta$. On note alors $S_{\partial\Gamma}$ la configuration dans la frontière de Γ et $S^*_{\partial\Gamma}$ la configuration déduite de $S_{\partial\Gamma}$ par l'application $S_{\partial\Gamma} \to -S_{\partial\Gamma}$ si la frontière du contour est constituée de blocs de label -1; si $S_{\partial\Gamma}$ est de label 1 alors on pose $S^*_{\partial\Gamma} = S_{\partial\Gamma}$.

On note $\{S_V \Rightarrow \Gamma\}$ l'ensemble des configurations compatibles avec le contour Γ, c'est-à-dire les configurations produisant des labels η identiques à ceux de Γ. On fixe des conditions au bord de label 1 notées S^+. Le contour Γ sépare V en 2 régions, l'extérieur (c'est-à-dire la partie au contact avec V^c) sera noté V_1 et l'intérieur V_2.

$$\sum_{S_V} 1_{\{S_V \Rightarrow \Gamma\}} \exp(-\beta H_{V,\gamma}(S_V|S^+)) = \sum_{S_{V_1}} \sum_{S_{V_2}} \quad \exp(-\beta H_{V_1,\gamma}(S_{V_1}|S^+) - \beta H_{V_2,\gamma}(S_{V_2}))$$
$$\textstyle\sum_{S_{\bar\Gamma}} 1_{\{S_V \Rightarrow \Gamma\}} \exp(-\beta H_{\bar\Gamma,\gamma}(S_{\bar\Gamma}|S_{\partial\Gamma})),$$

où $S_{\partial\Gamma}$ correspond aux conditions fixées au bord de Γ par S_{V_1} et S_{V_2}. Les régions V_1 et V_2 sont ainsi découplées, on peut donc inverser le signe des spins de S_{V_2} si la partie commune à S_{V_2} et $S_{\partial\Gamma}$ a un label de signe négatif. On note $S^*_{V_2}$ la configuration ainsi obtenue.

$$\sum_{S_V} 1_{\{S_V \Rightarrow \Gamma\}} \exp(-\beta H_{V,\gamma}(S_V|S^+)) = \sum_{S_{V_1}} \sum_{S_{V_2}} \exp\Big(-\beta H_{V_1,\gamma}(S_{V_1}|S^+) - \beta H_{V_2,\gamma}(S^*_{V_2})\Big)$$
$$\sum_{S_{\bar\Gamma}} \exp(-\beta H_{\bar\Gamma,\gamma}(S_{\bar\Gamma}|S^*_{\partial\Gamma})) \frac{\sum_{S_{\bar\Gamma}} 1_{\{S_V \Rightarrow \Gamma\}} \exp(-\beta H_{\bar\Gamma,\gamma}(S_{\bar\Gamma}|S_{\partial\Gamma}))}{\sum_{S_{\bar\Gamma}} \exp(-\beta H_{\bar\Gamma,\gamma}(S_{\bar\Gamma}|S^*_{\partial\Gamma}))}.$$

Comme $S^*_{\partial\Gamma}$ et $S^*_{V_2}$ sont compatibles, on obtient

$$\sum_{S_V} 1_{\{S_V \Rightarrow \Gamma\}} \exp(-\beta H_{V,\gamma}(S_V|S^+)) \le \sum_{S_V} \exp(-\beta H_{V,\gamma}(S_V|S^+))$$
$$\frac{\sum_{S_{\bar\Gamma}} 1_{\{S_{\bar\Gamma} \Rightarrow \Gamma\}} \exp(-\beta H_{\bar\Gamma,\gamma}(S_{\bar\Gamma}|S_{\partial\Gamma}))}{\sum_{S_{\bar\Gamma}} \exp(-\beta H_{\bar\Gamma,\gamma}(S_{\bar\Gamma}|S^*_{\partial\Gamma}))}.$$

Ceci permet de majorer la probabilité de réaliser Γ

$$\mu_{\beta,\gamma}{}^{+}\Big(\{S_V \Rightarrow \Gamma\}\Big) \le \sup_{S_{\partial\Gamma}} \frac{\sum_{S_{\bar\Gamma}} 1_{\{S_{\bar\Gamma} \Rightarrow \Gamma\}} \exp(-\beta H_{\bar\Gamma,\gamma}(S_{\bar\Gamma}|S_{\partial\Gamma}))}{\sum_{S_{\bar\Gamma}} \exp(-\beta H_{\bar\Gamma,\gamma}(S_{\bar\Gamma}|S^*_{\partial\Gamma}))}.$$

En utilisant l'approximation mésoscopique (4.6) et en appliquant le théorème 4.1, on vérifie que

$$\mu_{\beta,\gamma,\Lambda}^{+}(\Gamma) \le \exp\Big(-\beta\ell \inf_{\sigma_{\partial\Gamma}} \Big(\inf_{m \Rightarrow \Gamma} E_{\bar\Gamma,\tau}(m|\sigma_{\partial\Gamma}) - \inf_m E_{\bar\Gamma,\tau}(m|\sigma^*_{\partial\Gamma})\Big) + \frac{L^2}{\gamma}|\Gamma|\varepsilon(\gamma,\tau,\ell)\Big), \tag{5.1}$$

où $|\Gamma|$ est le nombre de blocs dans Γ et l'infimum est pris pour des configurations $\sigma_{\partial\Gamma}$ compatibles avec Γ. La fonction $N(\Gamma)$, définie au théorème 4.1, est liée à $|\Gamma|$ par la relation

$$N(\Gamma) = |\Gamma| \frac{L^2}{\tau}.$$

Il suffit donc de prouver qu'il existe $c(\zeta, L, \delta)$ strictement positif tel que l'inégalité suivante est vérifiée quand τ est inférieur à une constante τ_0

$$\inf_{m \Rightarrow \Gamma} E_{\bar{\Gamma},\tau}(m|m_{\partial\Gamma}) - \inf_{m} E_{\bar{\Gamma},\tau}(m|m^*_{\partial\Gamma}) \geq \frac{c(\zeta,\delta,L)}{\tau}|\Gamma|, \tag{5.2}$$

uniformément en Γ et en $m_{\partial\Gamma}$ (on remplace cette fois $\sigma_{\partial\Gamma}$ par des configurations à valeurs continues). On remarque que γ et ℓ ne figurent pas dans (5.2). Les constantes ζ, δ et L étant fixées, il suffit alors de choisir γ_0, τ et ℓ tels que

$$\frac{c(\zeta,\delta,L)}{2} > L^2 \varepsilon(\gamma_0, \tau, \ell).$$

A l'aide de (5.2), on obtient alors le lemme 4.1.

L'inégalité (5.2) se déduit des 2 lemmes suivants.

Lemme 5.1. *Pour tous $\delta > 0$ et $\zeta > 0$ il existe τ_0 et $c(\zeta, \delta)$ strictement positifs tels que*

$$\forall \tau,\ 0 < \tau \leq \tau_0, \qquad \inf_{m \Rightarrow \Gamma} E_{\Gamma,\tau}(m) \geq \frac{c(\zeta,\delta)}{\tau}|\Gamma|.$$

L'expression $E_{\Gamma,\tau}(m)$ correspond à l'énergie de la configuration sur Γ sans les interactions avec l'extérieur de Γ.

Lemme 5.2. *Il existe $\delta > 0$ et $\zeta > 0$ suffisamment petits tels que, pour tous $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$, il existe $\tau_0 > 0$ et L suffisamment grand tels que, pour tout $0 < \tau \leq \tau_0$*

$$\inf_{m \Rightarrow \bar{\Gamma}/\Gamma} E_{\bar{\Gamma}/\Gamma,\tau}(m|m^*_{\partial\Gamma}) - \inf_{m} E_{\bar{\Gamma},\tau}(m|m^*_{\partial\Gamma}) \geq -\frac{\varepsilon_1}{\tau}N_\Gamma - \frac{\varepsilon_2}{\tau} - \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau}N_\Gamma L^2,$$

où N_Γ est le nombre de blocs constituant la frontière de Γ.

Avant de démontrer ces lemmes nous terminons la preuve de (5.2). En supprimant les interactions entre Γ et $\bar{\Gamma}/\Gamma$, on obtient

$$\inf_{m \Rightarrow \Gamma} E_{\bar{\Gamma},\tau}(m|m_{\partial\Gamma}) \geq \inf_{m \Rightarrow \bar{\Gamma}/\Gamma} E_{\bar{\Gamma}/\Gamma,\tau}(m|m_{\partial\Gamma}) + \inf_{m \Rightarrow \Gamma} E_{\Gamma,\tau}(m).$$

Les événements sur $\bar{\Gamma}/\Gamma$ et Γ étant ainsi décorrélés, on remarque que

$$E_{\bar{\Gamma}/\Gamma,\tau}(m|m_{\partial\Gamma}) = E_{\bar{\Gamma}/\Gamma,\tau}(m|m^*_{\partial\Gamma}).$$

On fixe δ et ζ pour que le lemme 5.2 soit vérifié. On définit alors $\tau_0^{(1)}$ et $c(\delta, \zeta)$ à l'aide du lemme 5.1. On choisit ensuite $\varepsilon_1 < \frac{c(\delta,\zeta)}{4}$ et $\varepsilon_2 < \frac{c(\delta,\zeta)}{4}$. Le lemme 5.2 permet d'affirmer qu'il existe L et $\tau_0^{(2)}$ tels que

$$\inf_{m \Rightarrow \Gamma} E_{\bar{\Gamma},\tau}(m|m_{\partial\Gamma}) \geq \inf_{m} E_{\bar{\Gamma},\tau}(m|m^*_{\partial\Gamma}) + \frac{c(\zeta,\delta)}{\tau}|\Gamma| - \frac{\varepsilon_1}{\tau}N_\Gamma - \frac{\varepsilon_2}{\tau} - \frac{\varepsilon(\tau)}{\tau}N_\Gamma L^2.$$

On peut majorer le nombre de blocs sur la frontière de Γ par le nombre de blocs dans Γ, c'est-à-dire $N_\Gamma \leq |\Gamma|$. D'après l'inégalité ci dessus, il suffit de choisir τ_0 tel que

$$L^2 \varepsilon(\tau_0) < \frac{c(\delta,\zeta)}{4} \qquad \text{et} \qquad \tau_0 \leq \inf(\tau_0^{(1)}, \tau_0^{(2)}).$$

pour que l'inégalité (5.2) soit vérifiée.

5.2. **Preuve du Lemme 5.1.** :

Les paramètres δ et ζ étant fixés, on choisit τ_0 suffisamment petit pour que les minima de $f_{\beta,\tau}$ soient dans $[m_\beta - \frac{\zeta}{10}, m_\beta + \frac{\zeta}{10}] \cup [-m_\beta - \frac{\zeta}{10}, -m_\beta + \frac{\zeta}{10}]$. Soit m une configuration dans Γ et C un bloc de spins dans Γ. On distingue 2 cas.

1er cas: $\eta(C) = 0$:

Supposons d'abord qu'il existe $\mathcal{C}^\delta$ inclus dans C tel que

$$|\frac{\tau}{2\delta} \sum_{\bar{x} \subset \mathcal{C}^\delta} m_{\bar{x}} \pm m_\beta| \geq \zeta.$$

Il existe 2 façons de réaliser un tel évènement.

Ou bien il y a au moins $\frac{\delta\zeta}{4\tau}$ rectangles $\bar{x}$ de $\mathcal{C}^\delta$ vérifiant $|m_{\bar{x}} \pm m_\beta| > \frac{\zeta}{4}$; alors chacun de ces rectangles contribue à augmenter l'énergie car dans ce cas $f_{\beta,\tau}(m_{\bar{x}})$ est supérieur à une constante $c_1(\zeta) > 0$. L'énergie du bloc C vérifie alors

$$\forall \tau < \tau_0, \qquad E_{C,\tau}(m) \geq E_{\mathcal{C}^\delta,\tau}(m) \geq \frac{\delta\zeta}{4\tau} c_1(\zeta).$$

Ou bien le nombre de rectangles $\bar{x}$ vérifiant $|m_{\bar{x}} \pm m_\beta| > \frac{\zeta}{4}$ est inférieur à $\frac{\delta\zeta}{4\tau}$, alors il y a au moins $\frac{\delta\zeta}{10\tau}$ rectangles où $|m_{\bar{x}} - m_\beta| < \frac{\zeta}{4}$ et au moins $\frac{\delta\zeta}{10\tau}$ rectangles où $|m_{\bar{x}} + m_\beta| < \frac{\zeta}{4}$. Cette fois, c'est le terme d'interaction qui pénalise ces configurations; il existe donc $c_2 > 0$ et $\tau_0 > 0$ tels que

$$\forall \tau < \tau_0, \qquad E_{C,\tau}(m) \geq E_{\mathcal{C}^\delta,\tau}(m) \geq \frac{\delta^2\zeta^2}{\tau} c_2.$$

La dernière façon de réaliser $\eta(C) = 0$ consiste à avoir 2 blocs C_1^δ et C_2^δ adjacents tels que l'aimantation moyenne de C_1^δ soit proche de m_β et celle de C_2^δ proche de $-m_\beta$. Dans ce cas, il existe au moins $\frac{\delta}{2\tau}$ rectangles de C_1^δ vérifiant $|m_{\bar{x}} - m_\beta| \leq 2\zeta$ et au moins $\frac{\delta}{2\tau}$ rectangles de C_2^δ tels que $|m_{\bar{x}} + m_\beta| \leq 2\zeta$. Une preuve identique à celle ci-dessus donne alors le résultat.

2ème cas: $\eta(C) \neq 0$.

Alors C est adjacent à un bloc C' tel que $\eta(C)\eta(C') = -1$. Dans ce cas l'énergie d'interaction devient prépondérante car on peut trouver 2 blocs adjacents C_1^δ (appartenant à C) et C_2^δ (appartenant à C') vérifiant les hypothèses du cas 1.

Par conséquent, chaque bloc de Γ contribue à augmenter l'énergie. Il existe donc une constante $c(\zeta, \delta)$ indépendante de Γ telle que l'énergie du contour Γ soit supérieure à $\frac{c(\zeta,\delta)}{\tau}|\Gamma|$. □

5.3. **Preuve du Lemme 5.2.** :

La première étape consiste à réécrire $E_{V,\tau}$. On définit le sous-ensemble $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ comme l'image du sous-ensemble V de $\mathbb{Z}^2$ par l'application κ

$$\kappa \ : \quad (k, j) \in \mathbb{Z}^2 \to [\gamma k, \gamma(k+1)[\times \{j\}.$$

Les configurations $(m_{\bar{x}})_{\bar{x} \in V}$ sont alors transformées en fonctions sur $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ par

$$\forall (r, j) \in \mathcal{V}, \qquad m(r, j) = m_{\bar{x}} \qquad \text{si} \ \ (r, j) \in \kappa(\bar{x}). \tag{5.3}$$

Soit m une fonction sur $\mathcal{V}=\kappa(V)$, on lui associe l'aimantation σ

$$\forall \bar{x}\subset V, \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\tau}\int_{(r,j)\in\kappa(\bar{x})} m(r,j)\,dr. \tag{5.4}$$

On définit les labels η associés à m comme les labels η associés à σ. On peut donc utiliser ainsi la notion de contours pour les configurations à valeurs continues.

On note $m_{\mathcal{V}^c}$ l'image de la configuration de σ_{V^c} par l'application (5.3). Pour toute fonction m sur $\mathcal{V}$, on définit maintenant

$$\begin{aligned}
E_{\mathcal{V}}(m\,|m_{\mathcal{V}^c}) = &-\frac{1}{2}\sum_{k,k'}\int 1_{(r,k)\in\mathcal{V}}\,1_{(r',k')\in\mathcal{V}}\mathcal{J}(k,k')J(r-r')m(r,k)m(r',k')\,drdr'\\
&-\sum_{k,k'}\int 1_{(r,k)\in\mathcal{V}}\,1_{(r',k')\in\mathcal{V}^c}\mathcal{J}(k,k')J(r-r')m(r,k)m_{\mathcal{V}^c}(r',k')\,drdr'\\
&+\frac{1}{\beta}\sum_{k}\int 1_{(r,k)\in\mathcal{V}}\,I(m(r,k))\,dr.
\end{aligned}$$

On remarquera que le paramètre τ a disparu dans cette nouvelle expression de l'énergie. On cherche maintenant à relier $E_{\mathcal{V}}(m\,|m_{\mathcal{V}^c})$ avec $E_{V,\tau}(\sigma_V\,|\sigma_{V^c})$ où m est l'image de σ par l'application (5.3). On remarque que la fonction m est constante sur des segments horizontaux de longueur τ, ceci permet d'obtenir à l'aide de l'expression (4.2)

$$\begin{aligned}
E_{V,\tau}(\sigma_V\,|\sigma_{V^c}) = &-\frac{1}{2\tau}\sum_{k,k'}\int 1_{(r,k)\in\mathcal{V}}\,1_{(r',k')\in\mathcal{V}}\mathcal{J}(k,k')J(r-r')m(r,k)m(r',k')\,drdr'\\
&-\frac{1}{\tau}\sum_{k,k'}\int 1_{(r,k)\in\mathcal{V}}\,1_{(r',k')\in\mathcal{V}^c}\mathcal{J}(k,k')J(r-r')m(r,k)m(r',k')\,drdr'\\
&+\frac{1}{\beta\tau}\sum_{k}\int 1_{(r,k)\in\mathcal{V}}\,I(m(r,k))\,dr+\frac{1}{\tau}\#|\mathcal{V}|\varepsilon(\tau),
\end{aligned}\tag{5.5}$$

où m est l'image de σ par l'application (5.3) et $\#|\mathcal{V}|$ est le volume de $\mathcal{V}$ défini par

$$\#|\mathcal{V}| = \tau\{\text{nombre de rectangles } \bar{x} \text{ dans } V\}.$$

Cette quantité est donc liée au nombre de blocs dans V (à un facteur L^2 près). Par la suite, la notation $\varepsilon(\tau)$ désignera n'importe quelle fonction tendant vers 0 quand τ tend vers 0. L'équation (5.5) permet d'obtenir

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau}\inf_{m_{\mathcal{V}}\Rightarrow\Gamma} E_{\mathcal{V}}(m\,|m_{\mathcal{V}^c})+\frac{1}{\tau}\#|\mathcal{V}|\varepsilon(\tau) \geq \inf_{\sigma_V\Rightarrow\Gamma} E_{V,\tau}(\sigma_V\,|\sigma_{V^c})&\\
\geq \frac{1}{\tau}\inf_{m_{\mathcal{V}}\Rightarrow\Gamma} E_{\mathcal{V}}(m\,|m_{\mathcal{V}^c})-\frac{1}{\tau}\#|\mathcal{V}|\varepsilon(\tau),&
\end{aligned}$$

où $\{m_{\mathcal{V}}\Rightarrow\Gamma\}$ est l'ensemble des configurations réalisant le contour Γ. La borne inférieure s'obtient directement tandis que la borne supérieure nécessite l'utilisation de la convexité de l'entropie

$$\tau\sum_{\bar{x}\subset V} I(\sigma_{\bar{x}}) \leq \sum_{k}\int 1_{(r,k)\in\mathcal{V}}\,I(m(r,k))\,dr,$$

où σ est défini par (5.4).

Désormais et jusqu'à la fin du texte, seules des fonctions sur $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ vont intervenir. Pour simplifier on notera x tout élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ et $m(x) = m(r,k)$. On note $\mathbb{J}$ le terme d'interaction

$$\forall\ x = (r,k),\ y = (r',k), \qquad \mathbb{J}(x,y) = \mathcal{J}(k,k')J(r-r').$$

On introduit la mesure produit ν sur $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ dont la première marginale est la mesure de Lebesgue et la seconde la mesure de comptage. Par la suite on notera pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ et toute fonction f

$$\int_A f(x)\nu(dx) = \sum_k \int 1_{(r,k)\in A} f(\{r,k\})\, dr.$$

De même pour tous sous-ensembles A, B de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ et toute fonction g, on a

$$\int_{A\times B} f(x,y)\nu(dx)\nu(dy) = \sum_{k,k'} \int 1_{(r,k)\in A}\, 1_{(r',k')\in B}\, g(\{r,k\},\{r',k'\})\, dr dr'.$$

Comme dans le cas discret, on peut redéfinir l'énergie sous la forme

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{V}}(m\,|m_{\mathcal{V}^c}) =& \frac{1}{4}\int_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}} \mathbb{J}(x,y)\Big(m(x) - m(y)\Big)^2 \nu(dx)\nu(dy) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}\times\mathcal{V}^c} \mathbb{J}(x,y)\Big(m(x) - m(y)\Big)^2 \nu(dx)\nu(dy) \\ &+ \int_{\mathcal{V}} f_\beta(m(x))\nu(dx) + C(m_{\mathcal{V}^c}), \end{aligned}$$

où $C(m_{\mathcal{V}^c})$ est une constante ne dépendant que des conditions au bord et f_β ne dépend pas de τ

$$\forall m \in [-1,1], \qquad f_\beta(m) = \beta^{-1}I(m) - 2m^2.$$

Nous allons utiliser cette nouvelle représentation de l'énergie, pour montrer le lemme 5.2. Soit Γ un contour donné et $m_{\partial\Gamma}$ des conditions au bord fixées. Les paramètres ε_1 et ε_2 étant fixés, il suffit de prouver

$$\inf_{m \Rightarrow \bar{\Gamma}/\Gamma} E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(m\,|m^*_{\partial\Gamma}) - \inf_m E_{\bar{\Gamma}}(m\,|m^*_{\partial\Gamma}) \geq -\varepsilon_1 N_\Gamma - \varepsilon_2, \tag{5.6}$$

où cette fois $E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}$ désigne la version sous forme intégrale de l'énergie. On conserve le symbole $\bar{\Gamma}/\Gamma$ pour l'image de $\bar{\Gamma}/\Gamma$ par l'application κ.

On choisit d'abord une fonction $m^0_{\bar{\Gamma}/\Gamma}$ telle que

$$\inf_{m \Rightarrow \bar{\Gamma}/\Gamma} E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(m|m^*_{\partial\Gamma}) \geq E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(m^0_{\bar{\Gamma}/\Gamma}|m^*_{\partial\Gamma}) - \varepsilon_2. \tag{5.7}$$

Pour montrer (5.6), il suffit de vérifier qu'il existe une fonction $m^1_{\bar{\Gamma}}$ telle que

$$E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(m^0_{\bar{\Gamma}/\Gamma}|m^*_{\partial\Gamma}) \geq E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(m^1_{\bar{\Gamma}}|m^*_{\partial\Gamma}); \tag{5.8}$$

de plus, on veut que $m^1(x)$ soit égale à m_β sur Γ et soit exponentiellement proche de la valeur d'équilibre m_β quand x est proche de Γ, c'est-à-dire

$$\forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \qquad |m^1(x) - m_\beta| \leq \exp(-c\,\mathrm{dist}(x,\partial\Gamma)), \tag{5.9}$$

où cette fois

$$\operatorname{dist}\Big((r,k);(r',k')\Big) = \sup\Big(|r-r'|, |k-k'|\Big).$$

En utilisant (5.9), on montre que l'interaction entre $\bar{\Gamma}/\Gamma$ et Γ peut être alors rendue arbitrairement petite si L est assez grand. On peut donc prolonger $m^1_{\bar{\Gamma}}$ sur Γ par m_β

$$E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(m^1_{\bar{\Gamma}}) \geq E_{\bar{\Gamma}}(m^1_{\bar{\Gamma}}) - \varepsilon_1 N_\Gamma.$$

Ceci conduit à (5.6). L'existence d'une fonction $m^1_{\bar{\Gamma}}$ est démontrée dans la section suivante.

6. Dynamique

Cette section est consacrée à la construction d'une configuration $m^1_{\bar{\Gamma}}$ qui satisfait les conditions (5.8) et (5.9). La preuve repose sur les arguments développés par Cassandro et Presutti [CP96]. Cette nouvelle configuration sera obtenue à partir de $m^0_{\bar{\Gamma}/\Gamma}$ introduite en (5.7). Plus précisément, on considère le problème de Cauchy ci dessous, de donnée initiale $m^0_{\bar{\Gamma}/\Gamma}$

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \qquad & \frac{\partial m}{\partial t}(x,t) = -m(x,t) + \tanh\Big(\beta\Big[\tilde{\mathbb{J}} \times (m + m^*_{\partial\Gamma})\Big](x,t)\Big), \\ & m(x,0) = m^0_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(x). \end{aligned} \tag{6.1}$$

où

$$\tilde{\mathbb{J}}(x,y) = \mathbb{J}(x,y) + \delta_{x-y}\left(\int_{x"\in\Gamma} \mathbb{J}(x,x")\,d\nu(x")\right)$$

et pour toute configuration m, la fonction $\tilde{\mathbb{J}} \times m$ est définie par

$$[\tilde{\mathbb{J}} \times m](x,t) = \int_{y\in\mathbb{R}\times\mathbb{Z}/\Gamma} \mathbb{J}(x,y)m(y,t)\nu(dy) + \left(\int_{x"\in\Gamma} \mathbb{J}(x,x")\nu(dx")\right) m(x,t).$$

Par la suite, on notera $[\tilde{\mathbb{J}} \times m](x,t) = \tilde{\mathbb{J}} \times m(x,t)$. On utilisera une notation similaire pour les fonctions indépendantes de t.

La première étape consiste à montrer la décroissance de $t \to E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(m(.,t) \mid m^*_{\partial\Gamma})$; on en déduit (5.8). Il suffit ensuite de vérifier que quand t est suffisamment grand les fonctions $x \to m(x,t)$ satisfont (5.9).

6.1. **Décroissance de l'énergie.** Nous commençons par définir les notions de sous-solutions et de sur-solutions.

Définition 6.1. *Une fonction v est une sous-solution pour le problème de Cauchy* (6.1) *si elle vérifie, pour tout $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} \forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \qquad & v(x,0) \leq m^0_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(x), \\ & \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \leq -v(x,t) + \tanh\left(\beta\tilde{\mathbb{J}} \times (v + m^*_{\partial\Gamma})(x,t)\right). \end{aligned}$$

De la même façon, u est une sur-solution si

$$\begin{aligned} \forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \qquad & u(x,0) \geq m^0_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(x), \\ & \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \geq -u(x,t) + \tanh\left(\beta\tilde{\mathbb{J}} \times (u + m^*_{\partial\Gamma})(x,t)\right). \end{aligned}$$

Les sous-solutions et sur-solutions permettent d'encadrer les solutions de (6.1)

Lemme 6.1. *Si v est une sous-solution pour* (6.1) *et u une sur-solution alors*

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \qquad v(x,t) \leq m(x,t) \leq u(x,t).$$

Preuve :

On se contente de vérifier l'inégalité dans le cas d'une sous-solution, la preuve étant identique pour une sur-solution. Pour tout $T > 0$, on note $\mathcal{C}_T$ l'ensemble des fonctions sur $\bar{\Gamma}/\Gamma \times [0,T]$ continues sur $[0,T]$. Soit G l'opérateur de $\mathcal{C}_T$ dans lui même défini par

$\forall f \in \mathcal{C}_T, \forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \forall t > 0,$

$$G(f)(x,t) = \exp(-t) f(x,0) + \int_0^t ds \, \exp(s-t) \tanh\Big(\beta \tilde{\mathbb{J}} \times (f + m^*_{\partial\Gamma})(x,s)\Big).$$

Si T est suffisamment petit, G est une contraction et par itération on montre que la solution m de (6.1) s'écrit

$$\forall t \in [0,T], \qquad m(t) = \lim_{n\to\infty} G^{(n)}(m^0)(t).$$

Si v est une sous-solution, on a alors

$$\forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \qquad \partial_t\Big(G(v)(x,t) - v(x,t)\Big) \geq v(x,t) - G(v)(x,t).$$

On en déduit que

$$\forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \qquad G(v)(x,t) \geq v(x,t).$$

On constate que si $f \geq g$ alors $G(f) \geq G(g)$. Par conséquent, en itérant l'équation ci dessus, on en déduit

$$\forall t \in [0,T], \forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \qquad \tilde{m}(x,t) \geq v(x,t),$$

où $\tilde{m}$ est la solution de (6.1) de donnée initiale $v(0)$; Comme $m(0) \geq \tilde{m}(0)$, on a en utilisant la monotonie de G que

$$\forall t \in [0,T], \forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \qquad m(x,t) \geq \tilde{m}(x,t).$$

L'argument ne dépend pas des données initiales, on peut l'étendre sur $[T, 2T]$ puis sur $\mathbb{R}$. □

Nous montrons maintenant que pour tout temps les solutions $m(.,t)$ de (6.1) vérifient (5.8).

Proposition 6.1. *La fonctionnelle $E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(\cdot | m^*_{\partial\Gamma})$ est une fonctionnelle de Lyapunov pour le problème de Cauchy* (6.1)*, c'est-à-dire*

$$E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(m(.,t) \,|\, m^*_{\partial\Gamma}) - E_{\bar{\Gamma}/\Gamma}(m^0_{\bar{\Gamma}/\Gamma} \,|\, m^*_{\partial\Gamma}) \leq 0. \tag{6.2}$$

Preuve :

La première étape consiste à vérifier que pour tout temps $\|m(.,t)\|_\infty < 1$. Pour cela, on construit une sur-solution de donnée initiale 1 et on vérifie qu'elle devient strictement inférieure à 1 pour tout temps strictement positif. Vérifions que pour δ et ζ suffisamment petits, il existe $c < 1$ tel que

$$\forall x \in \bar{\Gamma}/\Gamma, \qquad -c + \tanh(\beta \tilde{\mathbb{J}} \times (c + m^*_{\partial\Gamma})(x)) < 0. \tag{6.3}$$

En utilisant le fait que J est uniformément équicontinue, on a

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{J}} \times m^*_{\partial\Gamma}(r,k) &= \sum_k \mathcal{J}(k,k') \int J(r-r') m^*_{\partial\Gamma}(r,k)\, dr' \\ &\leq \sum_k \mathcal{J}(k,k') \sum_j \delta J(r-\delta j)(m_\beta + \zeta) + \varepsilon(\delta),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\mathbb{J}} \times m^*_{\partial\Gamma} \leq \tilde{\mathbb{J}} \times (m_\beta + \zeta) + \varepsilon(\delta).$$

Par conséquent, si δ et ζ sont petits, alors $\tilde{\mathbb{J}} \times m^*_{\partial\Gamma} \leq \tilde{\mathbb{J}} \times 1$. On peut trouver $c < 1$ vérifiant (6.3) pour toute condition au bord $m^*_{\partial\Gamma}$. On définit alors $u(t)$ comme la fonction

$$\forall r \in \Gamma/\Gamma, \qquad u(t) = c + \exp(-t)(1-c).$$

Quand c est suffisamment proche de 1, cette fonction est bien une sur-solution de donnée initiale 1. On fait de même avec une sous-solution de donnée initiale -1. Le lemme 6.1 permet alors de contrôler le comportement de m et d'obtenir $\|m(.,t)\|_\infty < 1$.

La donnée initiale du problème de Cauchy pouvant être choisie dans $]-1,1[$, ceci implique que la fonction $m(.,t)$ reste dans l'intervalle $]-1,1[$ pour tout temps et par conséquent que $t \to I\big(m(x,t)\big)$ est dérivable. En dérivant l'énergie, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{\bar\Gamma/\Gamma}}{\partial t}(m(.,t)\,|\,m^*_{\partial\Gamma}) &= \frac{1}{2}\int_{\bar\Gamma/\Gamma\times\bar\Gamma/\Gamma} \nu(dx)\nu(dy)\mathbb{J}(x,y)(m(x,t)-m(y,t)) \\ &\qquad \Big(-m(x,t)+m(y,t)+\tanh\Big(\beta\tilde{\mathbb{J}}\times(m+m^*_{\partial\Gamma})(x,t)\Big) \\ &\qquad\qquad -\tanh\Big(\beta\tilde{\mathbb{J}}\times(m+m^*_{\partial\Gamma})(y,t)\Big)\Big) \\ &+ \int_{\bar\Gamma/\Gamma\times\partial\Gamma} \mathbb{J}(x,y)(m(x,t)-m(y,t)) \\ &\qquad \Big(-m(x,t)+\tanh\Big(\beta\tilde{\mathbb{J}}\times(m+m^*_{\partial\Gamma})(x,t)\Big)\Big)\,\nu(dx)\nu(dy) \\ &+ \int_{\bar\Gamma/\Gamma}\Big(\beta^{-1}\tanh^{-1} m(x,t) - 2m(x,t)\Big) \\ &\qquad \Big(-m(x,t)+\tanh\Big(\tilde{\mathbb{J}}\times(m+m^*_{\partial\Gamma})(x,t)\Big)\Big)\,d\nu(x).\end{aligned}$$

On a utilisé la relation $I'(m) = \tanh^{-1}(m)$.

Après simplification on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{\bar\Gamma/\Gamma}}{\partial t}(m(.,t)\,|\,m^*_{\partial\Gamma}) &= \int_{\bar\Gamma/\Gamma}\Big(-m(x,t)+\tanh\Big(\beta\tilde{\mathbb{J}}\times(m+m^*_{\partial\Gamma})(x,t)\Big)\Big) \\ &\qquad \Big(\beta^{-1}\tanh^{-1}(m(x,t) - \tilde{\mathbb{J}}\times(m+m^*_{\partial\Gamma})(x,t)\Big)\,d\nu(x),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial E_{\bar\Gamma/\Gamma}}{\partial t}\quad(m(.,t)\,|\,m^*_{\partial\Gamma}) \leq 0.$$

En intégrant entre 0 et t, on obtient (6.2). □

6.2. **Relaxation vers l'équilibre.** On cherche finalement à déduire de (6.1) une configuration $m^1_{\bar\Gamma/\Gamma}$ vérifiant (5.8) et (5.9). Pour cela, nous encadrons $m(t)$ entre une sous-solution et une sur-solution. D'après la proposition 6.1, il suffit de montrer que, pour des temps assez grands, les solutions de (6.1) vérifient (5.9).

D'après l'appendice, on sait que $m^0_{\bar\Gamma/\Gamma}$ peut être choisie telle que

$$\forall x \in \bar\Gamma/\Gamma, \qquad 1 > m^0_{\bar\Gamma/\Gamma}(x) \geq m_\beta - 2\zeta.$$

On rappelle que le paramètre ζ a été introduit dans la procédure de renormalisation. Pour tout entier i plus petit que $N = \left[\frac{L}{4}\right]$, on définit

$$K_i = \{r \in \bar\Gamma \mid \mathrm{dist}(r, \delta\Gamma) \geq 2i\}.$$

On partitionne $\bar\Gamma/\Gamma$ en couches $\mathcal{S}_i = K_i/K_{i+1}$.

L'équation de champ moyen $m = \tanh(4\beta m)$ admet comme solution strictement positive m_β. On définit la suite de fonctions $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall i \leq 2, \forall t \geq 0, \qquad v_i(t) = m_\beta - 3\zeta,$$
$$\forall i \geq 3, \forall t \geq 0, \qquad \partial_t v_i(t) = -v_i(t) + \tanh(4\beta v_{i-1}(t)) \qquad \text{et} \quad v_i(0) = m_\beta - 3\zeta.$$

On sait alors que

$$\forall i \geq 2, \qquad v_{i+1}(t) = \exp(-t)(m_\beta - 3\zeta) + \int_0^t ds \exp(s-t) \tanh(4\beta v_i(s)).$$

On vérifie, par récurrence, que pour tout i la fonction v_i est inférieure à m_β. En effet si $v_i \leq m_\beta$ alors $\tanh(4\beta v_i) \leq m_\beta$, l'expression de $v_i(t)$ ci dessus donne alors le résultat. D'après l'équation différentielle qui régit v_i, on en déduit que v_i est croissante. Ceci implique

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad v_i^* = \lim_{t\to\infty} v_i(t),$$

et par conséquent $v_{i+1}^* = \tanh(4\beta v_i^*)$. Comme m_β est un point fixe par l'application $x \to \tanh(4\beta x)$ on en déduit que

$$\forall i \in \mathbb{N}, \qquad v_i^* \geq m_\beta - c_1 \exp(-c_2 i),$$

où c_1 et c_2 sont des constantes positives.

On définit alors la fonction w par

$$\forall i \in \{1, \dots, N\},\ \forall x \in \mathcal{S}_i, \qquad w(x,t) = v_i(t).$$

Il reste a prouver que w est une sous-solution, en utilisant le lemme 6.1 ceci impliquera alors que

$$\forall x \in \mathcal{S}_i, \qquad \liminf_{t\to\infty} m(x,t) \geq m_\beta - c_1 \exp(-c_2 i). \tag{6.4}$$

On va d'abord montrer que, pour tout i, la fonction $D_i(t) = v_{i+1}(t) - v_i(t)$ est positive. On sait que

$$D_{i+1}(t) = \int_0^t ds \exp(s-t)\Big(\tanh(4\beta v_i(s)) - \tanh(4\beta v_{i-1}(s))\Big).$$

Par récurrence on en déduit que D_i est positive.

Sur $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, la fonction w est constante. Une preuve similaire à celle de l'inégalité (6.3) permet de montrer que pour tout δ et ζ suffisamment petits, on a

$$\forall x \in \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2, \qquad -w(x,t) + \tanh(\beta \tilde{\mathbb{J}} \times (w + m^*_{\partial\Gamma})(x,t)) > 0 = \frac{\partial w}{\partial t}(x,t).$$

Si $i > 2$, on vérifie maintenant que pour tout x dans $\mathcal{S}_i$ on a

$$\tilde{\mathbb{J}} \times w(x,t) \geq \int \mathbb{J}(x,y) v_{i-1}(t)\, d\nu(y) \geq 4 v_{i-1}(t). \tag{6.5}$$

On remarque que pour $i > 2$, le terme $m^*_{\partial\Gamma}$ n'intervient plus dans l'équation différentielle, on obtient donc

$$\begin{aligned}\forall x \in S_i, \qquad \partial_t w(x,t) + w(x,t) - \tanh(\beta \tilde{\mathbb{J}} \times (w + m^*_{\partial\Gamma})(x,t)) &= \\ \tanh(4\beta v_{i-1}(t)) - \tanh(\beta \tilde{\mathbb{J}} \times w(x,t)).&\end{aligned}$$

D'après (6.5), l'expression ci dessus est négative, ceci permet de conclure que w est une sous-solution.

De la même façon, on construit une sur-solution u_t de donnée initiale $u_0 = 1$. Par un raisonnement identique on obtient que

$$\forall i \in \{1, \dots, N\},\ \forall x \in \mathcal{S}_i, \qquad \limsup_{t \to \infty} m(x,t) \leq m_\beta + c_1 \exp(-c_2 i). \tag{6.6}$$

Par (6.4) et (6.6), on sait qu'il existe (pour t suffisamment grand) une fonction $m^1_{\bar\Gamma}$ sur $\bar\Gamma$ qui satisfait (5.9).

7. APPENDICE

Dans cet appendice, on montre que le minimum de l'énergie sur l'ensemble des fonctions proches en moyenne de m_β est en fait pris pour des fonctions proches de m_β pour la norme uniforme.

Lemme 7.1. *Soit $\mathcal{V} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, un ensemble constitué de blocs. Pour ζ fixé, il existe δ suffisamment petit tel que pour toute fonction m sur $\mathcal{V} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ avec des labels η égaux à 1 (cf. (5.4)), il existe une fonction $\tilde{m}$ telle que*

$$E_{\mathcal{V}}(m | m_{\mathcal{V}^c}) \geq E_{\mathcal{V}}(\tilde{m} | m_{\mathcal{V}^c}) \qquad \text{et} \qquad \tilde{m} \geq m_\beta - 2\zeta.$$

Preuve :

On commence par définir 2 zones tampons $\mathcal{V}_1$ et $\mathcal{V}_2$ par

$$\mathcal{V}_i = \Big\{ (r,k) \in \mathcal{V} \ | \qquad i - 1 \leq \inf_{(r',k') \in \partial \mathcal{V}^c} \Big(2|r - r'|, |k - k'| \Big) \leq i \Big\}.$$

Soit m une fonction définie sur $\mathcal{V}$ dont les labels η valent 1. On définit $\tilde{m}$ par

$$\forall x \in \mathcal{V}, \qquad \tilde{m}(x) = \begin{cases} |m(x)| & \text{si } |m(x)| \geq m_\beta - 2\zeta, \\ m_\beta - 2\zeta & \text{si } |m(x)| < m_\beta - 2\zeta. \end{cases} \tag{7.1}$$

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \qquad h(x, m, A) = \frac{1}{\int_A \mathbb{J}(x,y)\, d\nu(y)} \int_A \mathbb{J}(x,y) m(y)\, d\nu(y).$$

En utilisant l'équicontinuité de J, on montre que, pour δ suffisamment petit, alors pour tout m dont le label vaut 1, on a

$$\forall x \in \mathcal{V}_1, \qquad h(x,m,\mathcal{V}^c) \geq m_\beta - 2\zeta, \tag{7.2}$$

et

$$\forall x \in \mathcal{V}_2, \qquad h(x,m,\mathcal{V}^c \cup \mathcal{V}_1) \geq m_\beta - 2\zeta. \tag{7.3}$$

D'après la définition de $\tilde{m}$ (cf. (7.1)), le terme de potentiel vérifie

$$\forall x \in \mathcal{V}, \qquad f_\beta(m(x)) \geq f_\beta(\tilde{m}(x)).$$

Par conséquent, il suffit de montrer que le terme d'interaction diminue quand on remplace m par $\tilde{m}$. On note

$\forall (A,B) \subset (\mathbb{R}\times\mathbb{Z})^2$,

$$R(A;B) = \int_{x\in A}\int_{y\in B} \mathbb{J}(x,y)\Big\{(\tilde{m}(x)-\tilde{m}(y))^2 - (m(x)-m(y))^2\Big\}\, d\nu(x) d\nu(y).$$

Soit s dans $[-1,1]$ et $A \subset \mathbb{R}\times\mathbb{Z}$, on pose

$$\forall x \in \mathbb{R}\times\mathbb{Z}, \qquad G(x,s,A) = \int_A \mathbb{J}(x,y)(s-m(x))^2\, d\nu(y).$$

Les 2 remarques suivantes seront très utiles par la suite

$$\text{si} \quad -1 \leq s \leq t \leq h(x,m,A), \quad \text{alors} \quad G(x,s,A) \geq G(x,t,A). \tag{7.4}$$

et si $h(x,m,A) > 0$ alors

$$G(x,s,A) \geq G(x,|s|,A). \tag{7.5}$$

Afin de montrer que $R(\mathcal{V}\times\mathcal{V}^c; \mathcal{V}\times\mathcal{V}^c)$ est négatif, on procède maintenant en plusieurs étapes.

Etape 1 : $R(\mathcal{V}/\mathcal{V}_1, \mathcal{V}/\mathcal{V}_1) \leq 0, \qquad R(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_1) \leq 0, \qquad R(\mathcal{V}/\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1) \leq 0.$
Par définition de $\tilde{m}$, on a $|\tilde{m}(x) - \tilde{m}(y)| \leq |m(x)-m(y)|$, ceci implique le résultat.

Etape 2 : $R(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}^c) \leq 0$
D'après (7.2), on a $h(r,m,\mathcal{V}^c) \geq m_\beta - 2\zeta > 0$. En appliquant (7.4) et (7.5), on a

$$\forall x \in \mathcal{V}_1, \qquad G(x,\tilde{m},\mathcal{V}_1) \geq G(x,m,\mathcal{V}_1),$$

ce qui permet de conclure.

Etape 3 : $R(\mathcal{V}_2, \mathcal{V}^c \cup \mathcal{V}_1) \leq 0$
On décompose $R(A;B)$ sous la forme $R(A;B) = R_1(A;B) + R_2(A;B)$ avec

$$R_1(A;B) = \int_{x\in A}\int_{y\in B} \mathbb{J}(x,y)\Big\{(\tilde{m}(x)-m(y))^2 - (m(x)-m(y))^2\Big\}\, d\nu(x) d\nu(y),$$

$$R_2(A;B) = \int_{x\in A}\int_{y\in B} \mathbb{J}(x,y)\Big\{(\tilde{m}(x)-\tilde{m}(y))^2 - (\tilde{m}(x)-m(y))^2\Big\}\, d\nu(x) d\nu(y).$$

On considère maintenant des sous-ensembles particuliers. Tout d'abord, on pose $A = \mathcal{V}_2 \cap \{x \in \mathcal{V}_2;\ \ |m(x)| < m_\beta - 2\zeta\}$ et $B = \mathcal{V}^c \cup \mathcal{V}_1$. Pour tout x dans A, on a $h(x,m,A) \geq m_\beta - 2\zeta$ par conséquent (7.4) implique $R_1(A,B) \leq 0$.

Pour contrôler R_2, on pose

$$B_1 = \mathcal{V}^c, \qquad B_2 = \{x \in \mathcal{V}_1;\ \ |m(x)| < m_\beta - 2\zeta\}$$
$$B_3 = \{x \in \mathcal{V}_1;\ \ |m(x)| \geq m_\beta - 2\zeta\}.$$

Comme sur B_1 la configuration m est inchangée, on a $R_2(A, B_1) = 0$. Sur B_2 et A la configuration $\tilde{m}$ vaut $m_\beta - 2\zeta$, on a donc $R_2(A, B_2) = 0$. Finalement sur B_3, on a $\tilde{m}(x) = |m(x)|$, en remarquant que sur A on remarque que $\tilde{m}(x) = m_\beta - 2\zeta$, on en déduit que

$$R_2(A; B_3) = \int_{x \in A} \int_{y \in B_3} \mathbb{J}(x, y) \Big\{ (\tilde{m}(x) - |m(y)|)^2 - (\tilde{m}(x) - m(y))^2 \Big\} \, d\nu(x) d\nu(y) \leq 0.$$

Dans un second temps, on pose $A = \mathcal{V}_2 \cap \{x \in \mathcal{V}_2;\ \ |m(x)| \geq m_\beta - 2\zeta\}$ et $B = \mathcal{V}^c$. Une preuve similaire à la précédente montre que $R(A, B) \leq 0$. □

References

[BP96] T.Bodineau and E.Presutti: Phase diagram of Ising systems with additional long range forces. *To appear in Comm. Math. Phys.* (1997)

[Bo97] T.Bodineau: Etude du modèle de champ moyen local. *Thèse* (1997)

[BruHe91] M.Brunaud and B.Helffer: Un problème de double puits provenant de la théorie statistico-mécanique des changements de phase (ou relecture d'un cours de M.Kac). *Preprint LMENS*, March 1991.

[BZ96] A.Bovier and M.Zahradník: The low-temperature phase of Kac-Ising models. *To appear in Jour. Stat. Phys.* (1997)

[CMP95] M.Cassandro, R.Marra and E.Presutti: Corrections to the critical temperature in 2d Ising systems with Kac potentials. *Jour. Stat. Phys.* **78** (1995), p.1131-1138.

[CMP97] M.Cassandro, R.Marra and E.Presutti: Upper bounds on the critical temperature for Kac potentials. *Jour. Stat. Phys.* **88**, 3/4, (1997), p.537-566.

[CP96] M.Cassandro and E.Presutti: Phase transitions in Ising systems with long but finite range interactions. *Mark. Proc. and Rel. Fields* **2**, (1996), p. 241-262.

[Ell85] R.Ellis: *Entropy large deviations and stastical mechanics.* Springer Verlag (1985).

[Fr76] J.Fröhlich: Phase transitions, Goldstone bosons and topological superselection rules, *Acta Phys. Austriaca* Suppl. XV, (1976) p. 133-269.

[He95] B.Helffer: Semiclassical analysis for Schrödinger operators, Laplace integrals and transfer operators in large dimension: an introduction, Editions Paris-Sud (France) (1995).

[He96] B.Helffer: Splitting in large dimension and infrared estimates, in Microlocal Analysis and spectral theory, L. Rodino (editor), Proceedings of the NATO-ASI conference, (1997), p. 307-348, Kluwer.

[He97] B.Helffer: Splitting in large dimension and infrared estimates II - Moment inequalities, à paraitre dans Jour. Math. Phys. (1997).

[HelKa63] E.Helfand and M.Kac: *J. Math. Phys.* **4** (1963), p.1078-1088 .

[Ka66] M. Kac: Mathematical mechanisms of phase transitions. Brandeis lectures (1966), Gordon and Breach.

[KaTho66] M.Kac and C.Thompson: On the mathematical mechanism of phase transition. *Proc.N.A.S.* **55** (1966), p.676-683.

[KaTho66] M.Kac and C.Thompson: Erratum. *Proc.N.A.S.* **56** (1966), p.1625.

[LP66] J.Lebowitz and O.Penrose: Rigourous treatment of the Van der Waals-Maxwell theory of the liquid vapor transition *Jour. Math. Phys.* **7**, (1966), p.98-113.

[Pf87] C.Pfister: On the ergodic decomposition of Gibbs random fields for ferromagnetic Abelian lattice models. *Annals of the New York Academy of Sciences* **491** (1987), p.170-180.

Université Paris 7, URA 1321, Mathématiques - Case 7012, 2 Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05