Mécanique statistique hors équilibre : l'héritage de Boltzmann

Giovanni Gallavotti
Dipartimento di Fisica, Universitá di Roma La Sapienza

Resumé : On place quelques applications récentes de la théorie du Chaos en perspective avec la théorie classique de Boltzmann.

Boltzmann entreprit, [B66], de prouver l'existence des atomes en poursuivant un programme déjà amorcé par ses prédécesseurs. Son approche était d'établir que la conception de la matière en tant qu'agglomération d'atomes obéissants aux lois de la mécanique conduisait à la déduction des propriétés de la matière que connaissaient alors les expérimentateurs et les théoriciens.

Ainsi Boltzmann produisit des versions de plus en plus raffinées du *théorème de la chaleur*, [B68], [B71], [B72], [B77]. Au début il s'agissait de faire voir qu'il est possible de définir des quantités mécaniques associées, par exemple, à un gaz enfermé dans un conteneur cubique de volume V, telles que :

T = *énergie cinétique moyenne*
U = *énergie totale*
V = *volume*
p = *impulsion moyenne transférée aux parois par collision et par unité de surface*

où les moyennes sont calculées empiriquement en supposant les particules indépendantes et à distribution uniforme sur une sphère dan= s l'espace des impulsions et dans le volume V des positions.

Le théorème à prouver est alors que si on varie U et V de dU et dV et que l'on calcule la quantité :

$$\frac{dU + p\,dV}{T}$$

où p et T dépendent de U et V, on trouve *une différentielle exacte* : c'est à dire qu'il existe une fonction $S(U,V)$ telle que $dS = \frac{dU + p\,dV}{T}$.

Suite aux travaux de Boltzmann, Helmholtz considéra les systèmes mécaniques *monocycliques*, c'est-à-dire les systèmes dont tout mouvement d'énergie donnée est périodique et non dégénéré (ce qui veut dire que les mouvements d'énergie donnée ne diffèrent entre eux que par un décalage du temps d'observation), [H].

Il fit voir que, en général, si on imagine que les mouvements ("*états*") de tels systèmes sont paramétrés par leur énergie totale U et par un paramètre V dont les potentiels φ_V des forces qui agissent sur le système dépendent, alors en définissant :

T = *énergie cinétique moyenne*
U = *énergie totale*
V = *volume*
p = $\langle -\frac{\partial}{\partial V}\varphi\rangle$

où $\langle F\rangle$ maintenant dénote précisément la moyenne de F par rapport au temps (et donc n'est pas définie empiriquement comme dans le cas précedent), on trouve *en général* :

$$\frac{dU + p\,dV}{T} = \text{ différentielle exacte} \tag{1}$$

Celle-ci aurait pu n'être rien de plus qu'une curiosité. Mais Boltzmann avait une conception *discrète* de la nature : même s'il ne l'avait pas explicitement dit dans ses écrits populaires, on le verrait dans ses travaux scientifiques où l'emploi de l'analyse, avec ses intégrales et ses dérivées, est souvent vu comme un moyen technique pour venir à bout du calcul de sommes et de différences, [B05].

Donc pour Boltzmann le mouvement n'est qu'une évolution discrète où l'espace des phases est quadrillé en petites cellules à $6N$ dimensions (N étant le nombre de molécules) dont *une* contient le point qui représente l'état instantané du système. L'évolution apparait comme les déplacements successifs du point représentatif d'une cellule à une autre, alors que le temps s'écoule d'une petite quantité discrète h. Bien sûr le déplacement doit être conforme aux lois du mouvement.

C'est une représentation très familière aujourd'hui à qui essaye de simuler sur ordinateur les mouvements d'un gaz de particules. Sur l'ordinateur les états microscopiques du gaz sont représentés par des cellules (car les coordonnées des points sont représentées par des nombres qui sont déterminés avec une précision qui est loin d'être infinie et qui dépend de la machine ou plutôt du logiciel que l'on emploit) et l'évolution se déroule par pas discrets; le programme qui effectue ces pas est écrit avec les lois du mouvement comme guide.

De ce point de vue le mouvement est une permutation des cellules qui représentent l'état microscopique. Le système est alors toujours en évolution périodique : car toute permutation d'un nombre fini d'objets (les cellules d'énergie totale U donnée, dans le cas présent) engendre une évolution cyclique.

On imagine que l'on fixe l'énergie totale U et que les forces agissantes sur le système sont paramétrées par le volume V : en fait on imagine que, quoi que l'on fasse, les forces entre les particules ne varient pas et seules les forces entre les particules et les parois peuvent changer (à cause des mouvements des parois et des changements de volume qui en découlent).

Alors l'hypothèse de monocyclicité de Helmholtz, de non-dégénérescence des mouvements d'énergie donnée, correspondrait à dire que l'évolution est une permutation à un seul cycle des cellules et donc on serait dans la situation où le système est monocyclique : cette hypothèse est connue comme l'*hypothèse ergodique*.

Sous cette hypothèse on devrait avoir la possiblité de trouver, *en général*, une analogie mécanique de la thermodynamique et un théorème général de la chaleur. Puisque les moyennes doivent se calculer, alors, par la distribution uniforme sur l'espace des cellules d'énergie donnée (car les cellules ont des tailles égales) on se trouve obligé de vérifier que dans le cas d'un gaz (ou même d'un liquide ou d'un solide, vue la généralités des considérations en question)

$$\frac{dU\,+\,p\,dV}{T}\quad\text{est exact si}\quad p=-\langle\frac{\partial}{\partial V}\varphi_V\rangle.$$

Cette propriété, cas particulier d'une propriété plus générale que Boltzmann appella *orthodicité*, doit être accompagnée par la propriété supplémentaire que p est *aussi* l'impulsion moyenn= e transférée aux parois par les collisions, par unité de temps et de surface. Si cela est bien le cas on aura prouvé que en général un théorème de la chaleur est valable.

C'est ce que Boltzmann fit en 1884, [B84], en fondant, en même temps, la *théorie des ensembles statistiques* (qui est souvent attribuée à Gibbs, mais pas par Gibbs lui même, [G]).

Il est tout à fait remarquable que le théorème de la chaleur, eq.(1), est valable tant pour les petits systèmes (même à une particule, si la non-linéarité du mouvement est suffisante de façon à rendre l'hypothèse ergodique raisonnable) que pour les grands (avec 10^{23} particules).

L'exactitude de $\dfrac{dU\,+\,p\,dV}{T}$ *ne dépend pas de la taille du système*, [B84].

Cette indépendance est d'ailleurs une propriété absolument fondamentale et elle permit à Boltzmann de se dégager des critiques qui lui étaient adressées.

Les critiques, par Zermelo et même par Poincaré, étaient subtiles et portaient sur le principe selon lequel il serait impossible de déduire les lois macroscopiques (irréversibles) d'une mécanique réversible qui est nécessairement cyclique et donc apparemment pas irréversible (au bout d'un temps de *récurrence* le système revient à son état initial, contre toute intuition sur le comportement des systèmes macroscopiques), [B96], [B97].

Ces critiques s'adressaient surtout à l'équation de Boltzmann et par conséquent à l'approche irréversible à l'équilibre. Boltzmann, comme il est bien connu, répondit qu'on ne pouvait pas ne pas tenir compte des échelles de temps nécessaires à réveler des contradictions. Pour voir, au niveau macroscopique, les effets de la réversibilité microscopique, le temps qu'il fallait attendre était énorme qu'on le mesure en heures ou en âges de l'Univers, [B02]. Après quoi on observerait une évolution anormale pour revenir presque immédiatement au comportement normal et pour une période de durée encore aussi longue.

Mais cet argument, à la défense de l'équation de Boltzmann, détruisait aussi apparemment la signification du théorème de la chaleur et la possibilité de déduire la thermodynamique de la mécanique et de l'hypothèse ergodique. Car pour que le théorème de la chaleur ait un intérêt quelconque il faut que les moyennes dont il parle soient atteintes dans un laps de temps raisonnablement court : mais si le temps de récurrence (c'est à dire le temps nécessaire au point représentatif du système pour revenir à la cellule initiale dans l'espace des phases) est énorme alors les moyennes des observables risquent d'être atteintes sur un temps du même ordre, ce qui signifierait qu'elles n'ont pas d'intérêt physique.

Boltzmann aperçut cette difficulté et fut conduit à dire que dans un système macroscopique tout se passe comme si les moyennes sur des temps courts étaient les mêmes que sur les temps (inobservables) de récurrence. Ceci serait dû au fait que si le nombre de particules est très grand, les grandeurs d'intérêt thermodynamique prennent la même valeur sur presque tout l'espace des phases : ce qui leur permet d'atteindre leur valeur moyenne sur des temps très courts qui n'ont rien à voir avec le temps de récurrence (qui est infini à tout point de vue). Elle prennent la même valeur parce qu'elles sont à leur tour des moyennes sur les particules et ne dépendent pas de l'état de particules individuelles.

Donc l'hypothèse ergodique suggère l'ensemble microcanonique pour le calcul des moyennes : c'est un fait général que ces moyennes vérifient les relations thermodynamiques qui, d'un autre côté, sont observables grâce à la lois des grands nombres qui fait que ces grandeurs ont la même valeur partout (ou presque) dans l'espace des phases.

Il s'en suit que l'hypothèse ergodique n'est pas une justification de la thermodynamique et ne joue qu'un rôle cinématique. La thermodynamique est une *identité* mécanique qui devient observable au niveau macroscopique grâce à la loi des grands nombres, [Ga1].

Une fois achevée cette admirable construction conceptuelle on se pose la question de savoir si on peut faire de même dans le cas des systèmes *hors équilibre.*

Ce sont des systèmes de particules sur lesquels agissent une ou plusieurs forces conservatives dont le travail est dissipé dans des thermostats, permettant ainsi au système d'atteindre un état stationnaire.

C'est un problème pas vraiment touché par Boltzmann qui étudia en détail le problème du retour à l'équilibre d'un gaz perturbé de son état d'équilibre (retour qui se déroule selon l'équation de Boltzmann). Et il peut paraître étrange qu'un problème si naturel et d'une telle importance soit resté essentiellement ouvert jusqu'à nos jours.

On remarque immédiatement une profonde différence par rapport au problème de la théorie des états d'équilibre : il n'y a pas une véritable théorie macroscopique (comparable à la thermodynamique classique) qui puisse servir de guide et qui fournisse des résultats à prouver.

Une différence technique importante est que l'on peut s'attendre à ce qu= e le comportement physique du système dépende de la méthode qu'on emploie pour enlever la chaleur produite par le travail des forces qui agissent. Ce qui peut donner le souci qu'une théorie générale soit impossible à cause de la grande variété de forces thermostatiques qu'on peut imaginer pour un même système.

Mais, à mon avis, il ne s'agit que d'une difficulté apparente qui disparait au fur et à mesure qu'on précise la théorie.

Donc on va imaginer un système de particules sur lesquelles agissent des forces externes non conservatives et un mécanisme quelconque qui empèche le réchauffement. On va modéliser ce thermostat par des forces additionnelles. Par exemple, si le système est un gaz de sphères dures enfermées dans un conteneur périodique avec quelques obstacles fixes et soumises à un champ de force $\underline{E}$, on peut imaginer que les équations du mouvement soient :

$$m\,\underline{\ddot{x}}_i = \underline{f}_i + \underline{E} - \nu\,\underline{\dot{x}}_i = \Phi_i(\underline{x}, \underline{\dot{x}}) \tag{2}$$

où les $\underline{f}_i$ sont les forces entre particules (sphères dures élastiques) et entre particules et obstacles (qui sont aussi des sphères dures élastiques).

Ici $\nu\,\underline{\dot{x}} = \nu(\underline{\dot{x}})\,\underline{\dot{x}}$ est le modèle de thermostat. La vraie *difficulté* est que l'évolution engendre une contraction du volume de l'espace des phases car :

$$\frac{d}{dt}(d\underline{x}\ d\dot{\underline{x}}) = \text{div}\Phi \cdot (d\underline{x}\ d\dot{\underline{x}}) \tag{3}$$

et la dissipativité entraine $-\langle \text{div}\Phi \rangle > 0$, et donc l'état stationnaire devra être une distribution de probabilité $\mu(d\underline{x}, d\dot{\underline{x}})$ *concentrée sur un ensemble de volume nul*. Elle ne pourra pas être décrite par une densité de la forme : $\rho(\underline{x}, \dot{\underline{x}})\, d\underline{x}, d\dot{\underline{x}}$.

Du coup on ne peut même pas écrire les formules qui expriment formellement les moyennes des observables par rapport à l'état stationnaire en termes d'une fonction de densité inconnue.

Néanmoins on voudrait avoir de telles expressions pour pouvoir espérer en tirer des conséquences générales, du type du théorème de la chaleur, qui puissent être observées dans les petits systèmes (parce que directement observables) et dans les grands aussi (pour des raison différentes).

L'idée clef a pris forme au début des années 1970, 1973 au plus tard, et est due à Ruelle : mais dans un contexte apparemment assez différent du nôtre (celui de la mécanique des fluides et de la turbulence). On conçoit les mouvements turbulents d'un fluide stationnaire ou d'un gaz de particules comme des *mouvements chaotiques*.

Cela ne demande pas à première vue beaucoup d'imagination : mais le poin= t est que l'hypothèse est posée dans un sens technique précis, [R1], [R2]. Dans l'interprétation d'auteurs successifs, [GC], on dit que le principe est que *le système est "hyperbolique" ou d' "Anosov"*. C'est l'*hypothèse chaotique*.

Cela veut dire que en tout point x de l'espace des phases on peut établir un système *covariant* de coordonnées locales tel que l'évolution temporelle $n \to S^n x$ observée dans ce système voit x comme un point fixe (car on le suit) hyperbolique. C'est-à-dire on voit depuis x les autres points bouger de la même façon qu'on les voit si on regarde les mouvements à partir du point fixe instable d'un pendule : la différence étant que cela est vrai pour tout point (et non pas pour un point isolé comme dans le cas du pendule).

On aura cette propriété valable à l'équilibre aussi bien que hors équilibre : les mouvements des molécules sont chaotiques même dans les états d'équilibre. Pour comprendre ce qui se passe il convient de revenir au point de vue discret de Boltzmann.

Si un système est dissipatif il y a des difficultés supplémentaires car il est clair qu'on a beau rendre petites les cellules de l'espace des phases, on n'arrivera jamais à un système dynamique discret qui puisse être décrit comme une permutation des cellules : la contraction de l'espace des phases entraine que certaines cellules ne seront jamais plus visitées même si on les a visitées au départ (par exemple parce que l'on a initié le mouvement à partir d'elles). Les mouvements se déroulent asymptotiquement sur un *attracteur* (qui est plus petit que tout l'espace des phases, bien que si on considère l'espace de phases comme continu l'attracteur pourrait être dense[1]).

Mais si on considère seulement les cellules sur lesquelles se déroule le mouvement on est dans une situation *identique à l'équilibre et hors équilibre*. On imagine que le mouvement est une permutation à un cycle, et donc il y aura un état stationnaire unique. Le temps pour parcourir le cycle sera, bien évidemment, toujours du même ordre de grandeur qu'à l'équilibre (dans des situations pas trop extrêmes des paramètres qui déterminent les forces agissantes sur le système) : donc la raison pour laquelle on peut espérer observer les moyennes temporelles et les calculer par intégration par rapport à une distribution de probabilité sur l'espace des phases reste la même que celle déjà discutée dans le cas d'équilibre (et liée à la loi des grands nombres).

Toutefois il y a une difficulté : c'est une difficulté qu'on aurait pu discuter déjà dans le cas de l'équilibre. On a supposé, sans critique, que les cellules de l'espace des phases étaient toutes égales. Mais même dans le cas de l'équilibre les systèmes sont chaotiques et donc toute cellule est déformée par l'évolution temporelle qui la dilate dans certaines directions et la contracte dans d'autres.

Il apparaît alors que la représentation du mouvement comme évolutio= n d'une cellule vers une autre de forme et de taille identique est loin d'être triviale. Elle est en fait une hypothèse *forte* sur la dynamique, qui, à l'équilibre, sélectionne l'ensemble microcanonique comme distribution correcte à utiliser pour calculer les moyennes temporelles (et qui entraine le théorème de la chaleur). Il y

[1] Ce qui montre seulement que la notion de "grandeur" d'un attracteur est plutôt délicate

a bien d'autres distributions invariantes sur l'espace des phases (contrairement à ce qu'on entend dire parfois) et l'hypothèse apparemment innocente que le mouvement se représente comme une permutation de cellules identiques en sélectionne une particulière.

Hors équilibre la difficulté devient plus manifeste. Car le volume des cellules ne reste même pas invariant contrairement au cas de l'équilibre (grâce au théorème de Liouville). De plus hors équilibre il faut s'attendre à ce que la représentation du mouvement comme évolution de cellules identiques conduise à sélectionner une distribution de probabilité particulière sur l'espace des phases, concentrée sur les cellules qui constituent l'attracteur, [Ga2].

L'intérêt et l'importance des systèmes chaotiques au sens de l'hypothèse chaotique est que, en effet, pour tous ces systèmes *il y a une unique distribution stationnaire μ sur l'espace des phases qui donne les moyennes des grandeurs observées sur les mouvements qui commencent dans la grande majorité des cellules identiques en lesquelles on peut imaginer de diviser l'espace des phases.* C'est un résultat fondamental dû à Sinai et à Ruelle–Bowen : ainsi la distribution μ s'appelle *distribution SRB*, [S], [BR]. Dans le cas de l'équilibre, elle coïncide avec la distribution microcanonique.

Ce n'est pas ici le lieu de poursuivre la critique de la vision discrète du mouvement, bien qu'elle soit intéressante ne fusse que pour une interprétation correcte des simulations numériques qui se font de plus en plus fréquentes, voir la note [2] page suivante.

L'hypothèse chaotique conduit naturellement à une représentation discrète différente du mouvement qui non seulement ne souffre pas des critiques qu'on vient de mentionner, mais qui nous donne une formule explicite pour la valeur des moyennes des observables, valable à l= a fois à l'équilibre (où elle se réduit à l'ensemble microcanonique) et hors équilibre.

Cette nouvelle représentation est aussi basée sur des cellules : mais elle ne sont pas vraiment petites dans le sens qu'elles sont considérablement plus grandes que les cellules que l'on a utilisées jusqu'à maintenant et qui avaient la taille minimale concevable. On peut donc les appeller "cellules à gros grains" ou grosses cellules, réservant le nom de cellules de taille fine aux précédentes.

Il est en effet possible de découper l'espace des phases en cellules $E_1, E_2, \ldots = \{E_\kappa\}_{\kappa=1,\ldots}$ qui forment un = *pavage* ou une *partition* $\mathcal{P}$ et qui ont la propriété de *covariance*.

Leur bords sont constitués par une réunion d'axes des systèmes locaux de coordonnées dont on a parlé plus haut : donc les bords consistent en des surfaces qui soit se contractent sous l'action de la dynamique, soit se dilatent. On dira que les frontières des cellules de la partition $\mathcal{P} = E_1, E_2, \ldots$ consistent en une partie qui se contracte ou "stable" et en une partie qui se dilate ou "instable". La propriété de covariance dit alors que sous l'action de l'évolution les cellules se déforment *mais les parties stables de leur bords évoluent de façon à terminer comme sous–ensembles de leur réunion* : la figure suivante illustre cette propriété simple.

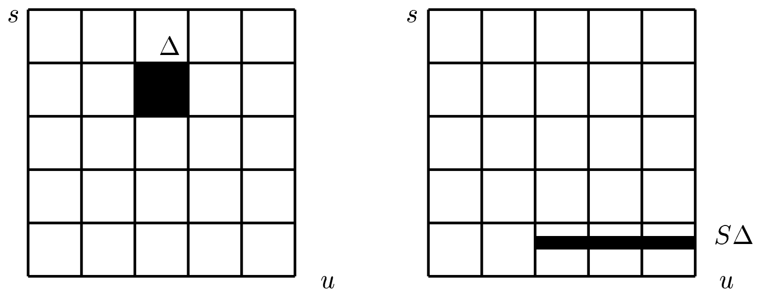

Fig.1

Si on a une telle partition (qui s'appelle *partition markovienne*) $\mathcal{P}$ on peut la raffiner en d'autres qui ont la même propriété de covariance : simplement en donnant un entier T et considérant la partition constituée par les ensembles $S^{-T}E_{\kappa_{-T}} \cap \ldots S^T E_{\kappa_T}$ qui, à cause de la contraction et de l'expansion de l'espace lors de l'évolution, forment une partition $\mathcal{P}_T$ dont les cellules deviennent aussi petites que l'on veut en prenant T assez grand.

Si F est une observable on peut en calculer la valeur moyenne simplement en considérant une partition markovienne $\mathcal{P}$ (arbitraire, car il n'y a pas d'unicité) en construisant la partition $\mathcal{P}_T$ avec T assez grand pour que F soit constant dans chaque cellule C de $\mathcal{P}_T$ et puis en posant :

$$\langle F\rangle = \frac{\sum_C P(C)F(C)}{\sum_C P(C)} \tag{4}$$

où $P(C)$ est un "poids" convenable. Il est construit en choisissant un point $c \in C$ et en considérant son évolution entre $-\tau$ et τ où τ est grand mais petit par rapport à T (par exemple $\tau = \frac{1}{2}T$).

On considère le point $S^{-\tau}c$ qui est transformé en $S^{\tau}c$ en un temps 2τ. On voit que l'axe, par $S^{-\tau}c$, des coordonnées qui se dilatent sous l'action de l'évolution est dilaté, au cours d'un temps 2τ, par un facteur qu'on appelle $\Lambda_{2\tau,i}(c)$: *alors le poids $P(C)$ peut être choisi égal à $\Lambda_{2\tau,i}(c)^{-1}$*.

L'équation (4) est la formule qui remplace la distribution microcanonique hors équilibre : on peut prouver que l'on s'y ramène sous l'hypothèse chaotique. La question qui se pose est si l'on peut tirer quelques conséquences générales de l'hypothèse chaotique moyennant l'usage de la représentation (4) ci-dessus.[2]

Dans ce contexte, mentionnons que récemment on a réussi à déduire une conséquence qui apparemment à un certain intérêt. On va la formuler pour un système décrit par une équation differentielle (et donc en temps continu) $\dot{x} = f(x)$ qui engendre un flot $t \to S^t x$ dans l'espace des phases. On suppose aussi *que l'évolution est réversible* : c'est-à-dire qu'il y a une transformation isométrique I de l'espace des phases qui anti-commute avec l'évolution : $IS^t = S^{-t}I$.

Imaginons un système pour lequel l'hypothèse chaotique soit valable, donc décrit par une équation $\dot{x} = f(x)$ et soit $\sigma(x) = -\mathrm{div}\, f(x)$ la contraction de l'espace des phases associée. Supposons que l'on mesure la quantité $\sigma(S^n x)$ au cours du temps mais avec le système dans son état stationnaire.

[2] L'expression (4) pour la distribution SRB permet d'éclaircir la réprésentation de l'évolution comme permutation des cellules à taille fine. On doit imaginer que chaque élement C ("cellule à gros grain") de la partition markovienne $\mathcal{P}_T$, avec un T très grand de façon à ce que toute observable F (pertinente pour le comportment macroscopique) reste constante sur chaque C : pour une représentation fidèle du mouvement, on imagine que chaque C est quadrillé par des cellules très petites "de taille fine" *en nombre proportionnel à $P(C)$*. Par l'évolution les cellules de taille fine se répartissent entre les éléments C' de $\mathcal{P}_T$ qui intersectent SC. On fait évoluer de la même façon les autres cellules fines des éléments de $\mathcal{P}_T$: la théorie des distributions SRB montre que le nombre des cellules de taille fine qui viennent se trouver dans chaque $C \in \mathcal{P}_T$ ne change pas, à une très bonne aproximation près; c'est la stationnarité de la distribution SRB, [Ga1]. Alors on peut définir l'évolution des cellules de taille fine simplement en disant qu'une cellule fine δ dans C évolue dans une des cellules fines qui sont dans la C' qui contient $S\delta$; il faut seulement faire attention à ne pas associer une même cellule fine de C' à deux cellules fines appartenant à differentes C (parmi celles telles que $SC \cap C' \neq \emptyset$) : on peut s'arranger de façon telle que la permutation des cellules fines ainsi définie soit à un seul cycle, car les détails du mouvement à l'intérieur des cellules C n'ont pas d'importance parce que les observables qui nous intéressent sont constantes dans les C. Mais la même construction peut être faite en remplaçant le poids $P(C)$ par $P(C)^\alpha$ avec $\alpha \neq 1$: on obtient ainsi d'autres distributions stationnaires *différentes* de la SRB, et on peut même en construire d'autres, [S], [R1]. On peut représenter de la même façon aussi ces autres distributions : mais on doit imaginer que les cellules de taille fine que l'on utilise pour en représenter une soient *différentes* de celles utilisées pour représenter les autres. *En fin de compte toutes les cellules fines ainsi introduites représentent l'attracteur.* Si on divise l'espace entier en (beaucoup de) cellules fines, de façon à ce que *toutes distributions stationnaires* puissent être représentées par une permutation des cellules fines qui se trouvent dans les $C \in \mathcal{P}_T$, alors on obtient une réprésentation discète très fidèle du mouvement. Mais toutes les cellules ne feront pas partie d'un cycle, car la dynamique est en général dissipative et une grande partie d'entre elles ne reviennent pas sur elles mêmes mais "tombent sur l'attracteur" où, dès lors, elles évoluent dans un cycle. La théorie de la distribution SRB montre que si on considère un ensemble ouvert dans l'espace des phases le comportement asymptotique du mouvement de tout point, sauf un ensemble de volume nul, est bien réprésenté par la distribution SRB, ce qui lui fait jouer un rôle particulier, au contraire des autres distributions que l'on peut definir : c'est-à-dire que la grande majorité (en volume) des cellules fines tombant sur l'attracteur vont se trouver parmi celles que l'on a associées aux cycles de la distribution SRB.

Appellons σ_+ sa moyenne temporelle *que l'on suppose non nulle* (alors elle ne peut être que positive par un théorème général, [R3]) et :

$$p = \frac{1}{\tau\sigma_+}\int_{-\frac{1}{2}\tau}^{\frac{1}{2}\tau} \sigma(S^t x)dt$$

et soit $\pi_\tau(p) = e^{\tau\zeta(p)}$ la distribution de probabilité de cette observable. Alors :

$$\frac{\zeta(p)-\zeta(-p)}{\tau\sigma_+} \equiv 1$$

c'est le *théorème de fluctuation*, [GC].

Je ne peux pas discuter ici la signification physique du théorème et de l'hypothèse de réversibilté, mais il est intéressant de souligner sa généralité, son indépendance du système considéré et aussi l'absence, dans sa formulation, de paramètres libres. Ce qui le rend en un certain sens analogue au théorème de la chaleur, qui lui aussi est général et sans paramètres libres.

Il suffira de dire que le théorème de fluctuation est une propriété qu'il faut quand même vérifier expérimentalement : en effet une partie de la théorie ci-dessus est née à la suite d'une expérience de simulation numérique et pour en interpréter théoriquement les résultats, [ECM]. Il y a eu aussi quelques vérifications indépendantes, [BGG], [LLP].

La raison pour laquelle des expériences sont nécessaires est qu'il n'y a aucun espoir de prouver que des systèmes réels vérifient au sens mathématique du mot l'hypothèse chaotique; moins encore de prouver que des systèmes réel vérifient l'hypothèse ergodique. Il n'y a même pas d'espoir de prouver que des systèmes intéressants en simulation numérique ou dans la réalit=E9 vérifient des propriétés qui soient assez proches de celles des systèmes hyperboliques pour en déduire des conséquences telles que le théorème de fluctuation. Mais on peut croire que néanmoins "les choses se passent comme si l'hypothèse chaotique était littéralement vraie".

Il y a donc une nécessité d'un contrôle expérimental car on est dans la même situation qu'à l'équilibre : où tout en croyant, avec =46eynman, que "*if we follow our solution* [*i.e.* motion] *for a lon= g enough time it tries everything that it can do, so to speak*" (see p. 46-4/5 in [F], vol. I), il a été néanmoins nécessaire de faire de bonnes vérifications expérimentales pour ne plus avoir de réserves ou de doutes sur l'hypothèse ergodique dans la théorie de l'équilibre.

Quelques références sont données ici pour guider le lecteur dans la littérature récente et ancienne. Elles sont loin d'être exhaustives : [WW], [ZZ].

Bibliographie.

[B66] Boltzmann, L.: *Über die mechanische Bedeutung des zweiten Haupsatzes der Wärmetheorie*, in "Wissenschaftliche Abhandlungen", ed. F. Hasenöhrl, vol. I, p. 9–33, reprinted by Chelsea, New York.

[B68] Boltzmann, L.: *Studien über das Gleichgewicht der lebendigen Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten*, in "Wissenschaftliche Abhandlungen", ed. F. Hasenöhrl, vol. I, p. 49–96, reprinted by Chelsea, New York.

[B71] Boltzmann, L.: *Analytischer Beweis des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über das Gleichgewicht des lebendigen Kraft*, in "Wissenschaftliche Abhandlungen", ed. F. Hasenöhrl, vol. I, p. 288–308, reprinted by Chelsea, New York.

[B72] Boltzmann, L.: *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*, english translation in S. Brush, *Kinetic theory*, Vol. 2, p. 88. Original in "Wissenschaftliche Abhandlungen", ed. F. Hasenöhrl, vol. I, p. 316–402, reprinted by Chelsea, New York.

[B77] Boltzmann, L.: *Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung, respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht*, in "Wissenschaftliche Abhandlungen", vol. II, p. 164–223, F. Hasenöhrl, Chelsea, New York, 1968 (reprint).

[B84] Boltzmann, L.: *Über die Eigenshaften monozyklischer und anderer damit verwandter Systeme*, in "Wissenschaftliche Abhandlungen", ed. F.P. Hasenöhrl, vol. III, Chelsea, New York, 1968, (reprint).

[B96] Boltzmann, L.: *Entgegnung auf die wärmetheoretischen Betrachtungen des Hrn. E. Zermelo*, engl. transl.: S. Brush, "Kinetic Theory", vol. 2, 218, Pergamon Press.

[B97] Boltzmann, L.: *Zu Hrn. Zermelo's Abhandlung "Ueber die mechanische Erklärung irreversibler Vorgänge*, engl. trans. in S. Brush, "Kinetic Theory", vol. 2, 238, Pergamon Press.

[B02] Boltzmann, L.: *Lectures on gas theory*, english edition annotated by S. Brush, University of California Press, Berkeley, 1964.

[B05] Boltzmann, L.: *More on atomism* inclus dans *Theoretical physics and philosophical problems*, p.54–56, ed. B. McGuinness, Reidel, 1974, traduction de *Populäre Schriften*, ed. J.A. Barth, Leipzig, 1905.

[BR] R.Bowen, D.Ruelle. *Ergodic theory of Axiom A flows*, Inventiones Math. **2**,181-202(1975). See also Ruelle, D.: *Chaotic motions and strange attractors*, Lezioni Lincee, notes by S. Isola, Accademia Nazionale dei Lincei, Cambridge University Press, 1989.

[BGG] Bonetto, F., Gallavotti, G., Garrido, P.: *Chaotic principle: an experimental test*, Physica D, **105**, 226–252, 1997,

[ECM] Evans, D.J.,Cohen, E.G.D., Morriss, G.P.: *Probability of second law violations in shearing steady flows*, Phys. Rev. Letters, **71**, 2401–2404, 1993.

[G] Gibbs, J.: *Elementary principles in statistical mechanics*, Ox Bow Press, 1981, (reprint).

[Ga1] Gallavotti, G.: *Meccanica Statistica*, "Quaderni del CNR-GNFM", vol. **50**, p. 1–350, Firenze, 1995.

[Ga2] Gallavotti, G.: *Ergodicity, ensembles, irreversibility in Boltzmann and beyond*, Journal of Statistical Physics, **78**, 1571–1589, 1995.

[GC] Gallavotti, G., Cohen, E.G.D.: *Dynamical ensembles in non-equilibrium statistical mechanics*, Physical Review Letters, **74**, 2694–2697, 1995. Gallavotti, G., Cohen, E.G.D.: *Dynamical ensembles in stationary states*, Journal of Statistical Physics, **80**, 931–970, 1995.

[H] Helmholtz, H.: *Principien der Statik monocyklischer Systeme*, in "Wissenschaftliche Abhandlungen", vol. III, p. 142–162 and p. 179– 202, Leipzig, 1895. And *Studien zur Statik monocyklischer Systeme*, in "Wissenschaftliche Abhandlungen", vol. III, p. 163–172 and p. 173– 178, Leipzig, 1895.

[LLP] Lepri. S., Livi, R., Politi, A. *Energy transport in anharmonic lattices close and far from equilibrium*, preprint, cond-mat@xyz. lanl. gov #9709156.

[R1] Ruelle, D.: *Measures describing a turbulent flow*, Annals of the New York Academy of Sciences, **357**, 1–9, 1980.

[R2] Ruelle, D.: *A measure associated with Axiom A attractors*, American Journal of Mathematics, **98**, 619–654, 1976.

[R3] Ruelle, D.: *Positivity of entropy production in nonequilibrium statistical mechanics*, Journal of Statistical Physics, **85**, 1–25, 1996. Et *Positivity of entropy production in the presence of a random thermostat*, Journal of Statistical Physics, **86**, 935–951, 1997.

[S] Sinai, Y.G.: *Gibbs measures in ergodic theory*, Russian Math. Surveys, **27**, 21–69, 1972. Also: *Introduction to ergodic theory*, Princeton U. Press, 1977.

[WW] Il est impossible ici de discuter analytiquement la vaste littérature qui suivit [R2] et précéda [GC]. Les travaux suivants sont remarquables et contiennent des références détaillées à d'autres travaux, aussi remarquables:
Holian, B.L., Hoover, W.G., Posch. H.A.: *Resolution of Loschmidt's paradox: the origin of irreversible behavior in reversible atomistic dynamics*, Physical Review Letters, **59**, 10–13, 1987.
Evans, D.J., Morriss, G.P.: *Statistical Mechanics of Non-equilibrium fluids*, Academic Press, New York, 1990.
Evans, D.J.,Cohen, E.G.D., Morriss, G.P.: *Viscosity of a simple fluid from its maximal*

Lyapunov exponents, Physical Review, **42A**, 5990–5997, 1990.
Dellago, C., Posch, H., Hoover, W.: *Lyapunov instability in system of hard disks in equilibrium and non-equilibrium steady states*, Physical Review, **53E**, 1485–1501, 1996.

[ZZ] La littérature qui a suivi à [GC] est aussi vaste mais une liste assez complète est la suivante:
Gallavotti, G.: *Reversible Anosov maps and large deviations*, Mathematical Physics Electronic Journal, MPEJ, (http:// mpej.unige.ch), **1**, 1–12, 1995.
Gallavotti, G.: *Chaotic hypothesis: Onsager reciprocity and fluctuation–dissipation theorem*, Journal of Statistical Phys., **84**, 899–926, 1996.
Gallavotti, G.: *Extension of Onsager's's reciprocity to large fields and the chaotic hypothesis*, Physical Review Letters, **77**, 4334–4337, 1996.
Gallavotti, G.: *Chaotic principle: some applications to developed turbulence*, Journal of Statistical Physics, **86**, 907–934, 1997.
Gentile, G: *Large deviation rule for Anosov flows*, `mp_arc@ math.utexas.edu, #96--79`, in print in Forum Mathematicum.
Ruelle, D.: *Differentiation of SRB states*, Communications in Mathematical Physics, **187**, 227–241, 1997.
Gallavotti, G., Ruelle, D.: *SRB states and non-equilibrium statistical mechanics close to equilibrium*, Communications in Mathematical Physics, in print; archived in `mp_arc@ math.utexas.edu, # 96--645`.
Gallavotti, G.: *Fluctuation patterns and conditional reversibility in non-equilibrium systems*, in print on Annales de l'Institut H. Poincaré, `chao-dyn@xyz.lanl.gov #9703007`.
Gallavotti, G.: *New methods in non-equilibrium gases and fluids*, Proceedings of the conference *Let's face chaos through nonlinear dynamics*, U. of Maribor, 24 June– 5 July 1996, ed. M. Robnik.
Gallavotti, G.: *Equivalence of dynamical ensembles and Navier Stokes equations*, Physics Letters, **223A**, 91–95, 1996.
Gallavotti, G.: *Dynamical ensembles equivalence in fluid mechanics*, Physica D, **105**, 163–184, 1997.
Ruelle, D.: *Entropy production in nonequilibrium statistical mechanics*, Communications in Mathematical Physics, **189**, 365–371, 1997.
Ruelle, D.: *New theoretical ideas in non-equilibrium statistical mechanics*, Lecture notes at Rutgers University, fall 1997.
Bonetto, F., Gallavotti, G.: *Reversibility, coarse graining and the chaoticity principle* Communications in Mathematical Physics, **189**, 263–276, 1997.
Morriss, G.P., Rondoni, L.: *Applications of periodic orbit theory to N–particle systems*, Journal of Statistical Physics, **86**, 991, 1997.
Kurchan, J.: *Fluctuation Theorem for stochastic dynamics*, preprint, cond-mat@xyz. lanl. gov, # 9709304.

Internet: Les dernières versions des prétirages de l'Auteur se trouvent aussi à :
`http://chimera.roma1.infn.it/`
`http://www.math.rutgers.edu/~giovanni/`
Mathematical Physics Preprints (mirror) pages.

e-mail: `gallavotti@roma1.infn.it`