Conditions necessaires et suffisantes pour qu'un problème de Cauchy C^∞ soit bien posé pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples de multiplicité paire

par

B. Messirdi*, A. Rahmani* et A. Senoussaoui**
*Université d'Oran Es-Sénia, Département de Mathématiques
Route d'Es-Sénia Es-Sénia, Oran, Algérie
**Dépatement de Mathématique, Université Libre de Bruxelles
Campus Plaine ULB, CP214, Bld du Triomphe B1050, Bruxelles, Belgique
E-mail: bmessirdi@univ-oran.dz, asenouss@ulb.ac.be

Resumé: Le but de cet article est d'établir, à partir d'hypothèses de localisation, des conditions algèbriques de bonne décomposition d'un systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples de multiplicité paire. Ces conditions sont suffisantes pour que le problème de Cauchy C^∞ associé soit bien posé. La téchnique de construction de solutions asymptotiques prouve que ces conditions suffisantes sont aussi necessaires.

Abstract: The objectif of this paper is to establish, with using localization hypothesis, some algebrically conditions of well decomposition of a system of partial differential equations with multiple characteristics and pair multiplicity. These conditions are sufficient for the well posendness of the C^∞ associated Cauchy problem. The technic of the asymptotically solutions prove that these sufficient conditions are also necessary.

AMS Subj: Classification 35S30, 35S05, 35P05

0. Introduction:

Depuis longtemps il a été montré dans le cadre des équations aux dérivées partielles que l'existence d'une onde asymptotique permet la contruction de solutions nulles (voir par exemple l'article de S. Mizohata [14]) et que la résolution du problème de Cauchy asymptotique permet la construction d'une parametrix (voir l'article de D. Ludwig [11]).

L'analyse du problème de Cauchy asymptotique entreprise dans le cas des systèmes notamment par J. Vaillant dans [15 à 17] puis par R. Berzin dans [1, 2] et par R. Berzin-J. Vaillant dans [3, 4] et aussi dans le cas scalaire par J.C. De Paris dans [6, 7] et très récemment l'étude des opérateurs intégraux de Fourier et leurs applications aux équations aux dérivées partielles faite par B. Messirdi-A. Senoussaoui dans [12] et [13] ont motivé notre recherche, ils constituent aussi un outil de base pour ce travail.

L'objetif de cet article est d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour résoudre le problème de Cauchy C^∞associé à un opérateur différentiel matriciel h à coéfficients C^∞sur une variété produit $X = \mathbb{R} \times X'$, X' étant compacte connexe sans bord, les traces sont C^∞ sur X', et où h vérifie deux types d'hypothèses, des hypothèses de localisation développés par J. Vaillant dans [15] et des hypothèses de décomposition dites de bonne décomposition introduites par J.C. De Paris dans [6, 7].

Notre travail généralise de manière non triviale des cas étudiés par R. Berzin dans [1, 2] et R. Berzin-J. Vaillant dans [3, 4], en particulier les méthodes que nous utilisons sont originales et nettement différentes.

Au paragraphe 1, nous introduisons des hypothèses sur la matrice caractéristique dans les différents anneaux localisés par rapport aux facteurs irréductibles de la décomposition du polynôme caractéristique matriciel H de l'opérateur h. Notre localisation généralise le cas double étudié par R. Berzin-J. Vaillant dans [4].

Le but du paragraphe 2 est d'établir des conditions algèbriques de bonne décomposition associées au système matriciel H à caractéristiques de multiplicité paire (cf. [1, 2], [17]). En adaptant à h la notion de décomposition d'un opérateur introduite par J.C. De Paris dans [7], on construit un opérateur auxilliaire q qui nous permet d'utiliser une bonne décomposition de multiplicité 2 au lieu d'une bonne décomposition de multiplicité 4 du système différentiel h.

Au paragraphe 3, nous vérifions que les conditions algèbriques que nous obtenons coincident avec celles utilisées par R. Berzin-J. Vaillant dans [3, 4] pour résoudre le problème de Cauchy C^∞.

En s'appuyant ensuite sur le lemme de V. Ivrii et V.M. Petkov [10] et en construisant une onde asymptotique par la méthode de R. Berzin-J. Vaillant [3, 4] et celle de H. Flaschka-G. Strang [9], on prouve au paragraphe 4 que les conditions suffisantes que nous obtenons sont aussi necessaires.

1. Notations, hypothèses et définitions:

Soit X' une variété C^∞compacte, réelle et de dimension n, on note $x' = (x^1, ..., x^\alpha, ..., x^n)$ un point de X', T^+ un réel strictement positif et $X = [0, T^+] \times X'$; on note aussi $x = (x^0, x') = (x^0, x^1, ..., x^\alpha, ..., x^n)$ un point de X dans une carte locale. Un point du fibré cotangent $T^*(X)$ est noté par (x, ξ) avec $\xi = (\xi_0, \xi') = (\xi_0, \xi_1, ..., \xi_\alpha, ..., \xi_n)$, on posera $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ et $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq n$.

On considère un opérateur différentiel linéaire matriciel de classe C^∞ sur X, $h = (h_B^A(x, \partial))_{1 \leq A,B \leq m}$ d'ordre t $(t \geqslant 1)$ sur X; la matrice caractéristique de h au sens de "Cauchy Kowalewski" sera notée par $H(x, \xi) = (H_B^A(x, \xi))_{1 \leq A,B \leq m}$, où $\forall A, B \in \{1, ..., m\}$, $H_B^A(x, \xi)$ est définie par:

$$\begin{cases} \text{le polynôme caractéristique de l'opérateur } h_B^A(x,\partial) \text{ si ordre}(h_B^A(x,\partial)) = t \\ 0 \text{ si ordre}(h_B^A(x,\partial)) < t \end{cases}$$

on suppose qu'elle est non dégénérée: ($\det(H(x, \xi))$ est une fonction réelle non identiquement nulle C^∞ en x polynômiale en ξ de degré mt.

Dans une carte locale, l'opérateur h s'écrit :

$$h(x, \partial) = H(x, \partial) + H^*(x, \partial) + ... + H^{*(j)}(x, \partial) + ... + H^{*(t)}(x, \partial)$$

où $H^{*(j)}(x, \partial) = (H_B^{*(j)A}(x, \partial))_{1 \leq A,B \leq m}$ est la partie d'ordre $(t - j)$ de $h_B^A(x, \partial)$, $1 \leq A, B \leq m$.

$$h_B^A(x,\partial) = \sum_{k=0}^{k=t} H_B^{*(k)A\ \ \alpha_1...\alpha_{t-k}} \partial_{\alpha_1}...\partial_{\alpha_{t-k}}$$

On suppose qu'il existe des fonctions C^∞ en x, polynômiales en ξ notées $H_0, H_1, ..., H_\delta, ...H_\sigma$, telles que:

$$\det(H) = (H_0)^4 \prod_{\delta=1}^{\delta=\sigma} H_\delta = (H_0)^4 H'' \text{ avec } H''(x,\xi) = \prod_{\delta=1}^{\delta=\sigma} H_\delta(x,\xi)$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

a) pour tout δ le degré de H_δ est constant et est égal à τ_δ, on pose $\tau' = \sum_{\delta=0}^{\delta=\sigma} \tau_\delta$

b) $\prod_{\delta=0}^{\delta=\sigma} H_\delta$ est strictement hyperbolique par rapport à la direction $N = (1, 0, ..., 0)$, c'est à dire pour tout (x, ξ'), $\xi' \neq 0$, l'équation en ξ_0 :

$$\prod_{\delta=0}^{\delta=\sigma} H_\delta(x, \xi_0, \xi') = 0$$

admet τ' racines réelles distinctes $\xi_0^\varrho(x, \xi')$, $1 \leq \rho \leq \tau'$, ces racines sont des fonctions C^∞ en (x, ξ') et positivement homogènes de degré 1 en ξ'.

Notation: On note $H_0 = H'$, donc $\det(H) = (H')^4 H''$

Définition 1.1: Le problème de Cauchy C^∞ pour h est dit bien posé dans X si et seulement si:

a) $\forall T \in [0, T^+[$, $\forall f \in C^\infty(X, C^m)$, $\forall g_0, ..., g_{t-1} \in C^\infty(X', C^m)$,
$\exists u \in C^\infty(X, C^m)$ telle que
$$\begin{cases} hu = f \quad \text{sur } X \\ \partial_0^\alpha u(T, x') = g_\alpha(x'), \ \alpha = 0, 1, ..., t-1 \end{cases}$$
b) $\forall T, \forall T'$, tels que $0 \leq T < T' < T^+, \forall u \in D'(X)$,
$$\left.\begin{array}{l} hu = 0 \text{ dans } X_{T'}^- \\ \text{support}(u) \subset X_T^+ \end{array}\right\} \Rightarrow u = 0 \text{ dans } X_T^-$$
où $X_T^+ = X \cap \left\{x^0 > T\right\}$ et $X_{T'}^- = X \cap \left\{x^0 < T'\right\}$.

Définition 1.2: Etant donnés trois polynômes P, Q et U en ξ à coefficients C^∞ en x. Si le polynôme $(P - Q)$ en ξ est divisible par U, on note $P \equiv Q[U]$. Si P et Q sont deux matrices de polynômes en ξ, à coefficients C^∞ en x, on note $P \equiv Q[U]$ si et seulement si $P_B^A \equiv Q_B^A[U]$ pour tout A,B. **Remarque 1.3:** Si a et b sont deux opérateurs différentiels matriciels d'ordres respectifs p et q, on note dans une carte locale quelconque de X, la partie d'ordre $(p + q - 1)$ de $(a \circ b)(x, \partial)$ par $(a \circ b)^*(x, \partial)$. $(a \circ b)^*(x, \partial)$ est donnée par:

$$(a \circ b)^*(x, \partial) = [AB^* + \partial^\alpha A \partial_\alpha B + A^* B](x, \partial)$$

avec la convention d'Einstein: $\partial^\alpha A \partial_\alpha B = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=n} \partial^\alpha A \partial_\alpha B$ qu'on utilisera par la suite sauf mention contraire, où A et B sont les matrices caractéristiques respectives de a et b.

Le terme d'ordre $(p + q - 2)$ de $(a \circ b)$ est:

$$(a \circ b)^{**}(x,\partial) = [AB^{**} + \partial^\alpha A \partial_\alpha B^* + \tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta} A \partial_{\alpha\beta} B + \partial^\alpha A^* \partial_\alpha B + A^* B^*](x,\partial)$$

Définition 1.4: (hypothèse de localisation (L2))

On dit que l'opérateur h vérifie la condition (L2) si et seulement si:

(1) Pour tout x, on désigne par Φ_δ l'anneau localisé de l'anneau des polynômes $IR[\xi_\alpha]$, $0 \le \alpha \le n$, par rapport à l'idéal premier engendré par $H'(x,\xi)$; on suppose que H s'exprime dans Φ_δ sous la forme équivalente:

$$H \sim \begin{pmatrix} (H')^2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & (H')^2 & & & . \\ . & & 1 & & . \\ . & & & & 0 \\ 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \quad m-2$$

Conséquences de (1) (cf. [16],[17]):

Tous les cofacteurs d'ordre $(m-1)$ de H sont divisibles par $(H')^2$ ou bien identiquement nuls; de plus il existe au moins un cofacteur d'ordre $(m-2)$ de H qui n'est pas divisible par H', ni identiquement nul, nous supposerons qu'il en existe un, tel que pour tout x il n'ait aucun zéro réel commun non nul avec H', on convient que ce soit A^{12}_{12} c'est à dire le mineur de $(H^A_B(x,\xi))$ obtenu en barrant la première et la deuxième ligne et la première et la deuxième colonne dans la matrice H.

2) h est fortement hyperbolique par rapport à chaque H_δ, $1 \le \delta \le \sigma$.

<u>Notations:</u>

(i) A^{AB}_{CD} est le cofacteur d'ordre $(m-2)$ de H obtenu en rayant la Cème et la Dème lignes et la Aème et la Bème colonnes et en mettant le signe convenable (si $A \neq B$ et $C \neq D$) et vaut 0 sinon (si $A = B$ ou $C = D$).

(ii) un indice chapeauté varie entre 3 et m, $3 \le \hat{B} \le m$. Un indice barré varie entre 1 et 2, $1 \le \overline{A} \le 2$.

$$A^{1}_{\overline{A}-1}\,{}^{2}_{B} = \left\{\begin{matrix} A^{12}_{B2} \text{ si } \overline{A} = 1 \\ A^{12}_{1B} \text{ si } \overline{A} = 2 \end{matrix}\right\} \qquad ; \qquad A^{\overline{A}-1}_{1}\,{}^{B}_{2} = \left\{\begin{matrix} A^{B2}_{12} \text{ si } \overline{A} = 1 \\ A^{1B}_{12} \text{ si } \overline{A} = 2 \end{matrix}\right\}$$

$$A\ {}^{\overline{D}-1}_{\overline{A}-1}\ {}^{\overline{D}+1}_{\overline{A}+1} = \left\{\begin{matrix} A^2_2 \text{ si } (\overline{A},\overline{D}) = (1,1) \\ A^1_2 \text{ si } (\overline{A},\overline{D}) = (1,2) \\ A^2_1 \text{ si } (\overline{A},\overline{D}) = (2,1) \\ A^1_1 \text{ si } (\overline{A},\overline{D}) = (2,2) \end{matrix}\right\}$$

les cofacteurs $A\ {}^{\overline{D}-1}_{\overline{A}-1}\ {}^{\overline{D}+1}_{\overline{A}+1}$ sont donc divisibles par $(H')^2$ ou identiquement nuls. D'après l'identité de Jacobi entre les cofacteurs de H: $A^1_1 A^A_F - A^1_F A^A_1 = A^{1A}_{1F} \det(H)$, on a

$$\det[A\ {}^{\overline{D}-1}_{\overline{A}-1}\ {}^{\overline{D}+1}_{\overline{A}+1}] = A^{12}_{12} \det(H)$$

ce qui implique que les cofacteurs $A\ {}^{\overline{D}-1}_{\overline{A}-1}\ {}^{\overline{D}+1}_{\overline{A}+1}$ ne sont pas tous nuls car A^{12}_{12} et $\det(H)$ ne le sont pas par hypothèse. De plus, si on définit la matrice $(\mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}})$ par:

$$\mathcal{A}_{\overline{D}}^{\overline{A}} = (-1)^{\overline{A}+\overline{D}} \frac{A_{\overline{A}-1\ \overline{A}+1}^{\overline{D}-1\ \overline{D}+1}}{(H')^2}$$

alors $\det(\mathcal{A}_{\overline{D}}^{\overline{A}}) = H'' A_{12}^{12}$, ainsi $\det(\mathcal{A}_{\overline{D}}^{\overline{A}})$ n'est pas divisible par H' et n'est pas identiquement nul.

Remarque 1.5: La matrice H définit un endomorphisme de $(\Psi_0)^m$ dont le noyau est un module libre de dimension 2 où pour tout x fixé dans X, $\Psi_0 = \Phi_0/(H')^2$ est l'anneau quotient de l'anneau localisé Φ_0 par l'idéal $(H')^2$.

Considérons $(\delta_{\overline{D}}^{B})_{\substack{1\leq B\leq m \\ 1\leq \overline{D}\leq 2}}$ avec $\delta_{\overline{D}}^{B} = A\ {}_{1}^{\overline{D}-1}\ {}_{2}^{B}$, on a (cf. [16, 17]):

$$\begin{cases} H_{B}^{\overline{A}}\delta_{\overline{D}}^{B} = (-1)^{\overline{A}+\overline{D}} A\ {}_{\overline{A}-1}^{\overline{D}-1}\ {}_{\overline{A}+1}^{\overline{D}+1} = (H')^2\mathcal{A}_{\overline{D}}^{\overline{A}} \\ H_{B}^{\widehat{C}}\delta_{\overline{D}}^{B} = 0 \end{cases}$$

d'où $H_{B}^{A}\delta_{\overline{D}}^{B} \equiv 0[(H')^2]$, il en est de même pour la matrice $(\gamma_{A}^{\overline{F}})_{\substack{1\leq \overline{F}\leq 2 \\ 1\leq A\leq m}}$ avec $\gamma_{A}^{\overline{F}} = A_{\overline{F}-1}^{1}\ {}_{A}^{2}$:

$$\gamma_{A}^{\overline{F}} H_{\overline{E}}^{A} = \mathcal{A}_{\overline{E}}^{\overline{F}}(H')^2 \quad \text{et} \quad \gamma_{A}^{\overline{F}} H_{\widehat{C}}^{A} = 0$$

d'où, $\gamma_{A}^{\overline{F}} H_{B}^{A} \equiv 0[(H')^2]$ et alors

$$\gamma_{A}^{\overline{F}} H_{B}^{A}\delta_{\overline{D}}^{B} = \gamma_{A}^{\overline{F}} H_{\overline{E}}^{A}\delta_{\overline{D}}^{\overline{E}} = (H')^2\mathcal{A}_{\overline{E}}^{\overline{F}}\delta_{\overline{D}}^{\overline{E}} = (H')^2 A_{12}^{12}\mathcal{A}_{\overline{D}}^{\overline{F}}$$

donc $\frac{\gamma_{A}^{\overline{F}} H_{B}^{A}\delta_{\overline{D}}^{B}}{(H')^2} = A_{12}^{12}\mathcal{A}_{\overline{D}}^{\overline{F}}$.

2. Conditions de bonne décomposition:

Pour traîter le cas $\nu_0 = 4$ qui généralise le cas double $\nu_0 = 2k_0$ avec $k_0 = 2$, on construit un opérateur q qui nous permet d'utiliser une bonne décompostion de multiplicité 2 au lieu d'une bonne décomposition de multiplicité 4 de l'opérateur h. En particulier, la décomposition de R. Berzin-J. Vaillant utilisée pour le cas $k_0 = 1$ dans [4] ne peut être adaptée à notre situation, notre étude revèle que les opérateurs différentiels que nous obtenons sont en pratique assez généraux.

On pose: $\underline{a} = [a_{1}^{\overline{F}-1}\ {}_{2}^{B}]_{\substack{1\leq B\leq m \\ 1\leq \overline{F}\leq 2}}$; $\overline{a} = [a_{\overline{F}-1}^{1}\ {}_{A}^{2}]_{\substack{1\leq \overline{F}\leq 2 \\ 1\leq A\leq m}}$; $b = [a_{1\ 2\ C}^{1\ 2\ B}]_{1\leq B,C\leq m}$

des opérateurs différentiels de matrices caractéristiques respectivement:

$$\underline{A} = [A_{1}^{\overline{F}-1}\ {}_{2}^{B}]_{\substack{1\leq B\leq m \\ 1\leq \overline{F}\leq 2}} ;\ \overline{A} = [A_{\overline{F}-1}^{1}\ {}_{A}^{2}]_{\substack{1\leq \overline{F}\leq 2 \\ 1\leq A\leq m}} ;\ B = [A_{1\ 2\ C}^{1\ 2\ B}]_{1\leq B,C\leq m}$$

où $A_{1\ 2\ C}^{1\ 2\ B}$ est un cofacteur d'ordre $(m-3)$ de H obtenu en rayant les première, deuxième et Bème colonnes et les première, deuxième et Cème lignes et en mettant le signe convenable si $B \neq 1, B \neq 2, C \neq 1, C \neq 2$; sinon $A_{1\ 2\ C}^{1\ 2\ B} = 0$.

On construit l'opérateur q suivant:

$$q = \overline{a}hp \quad \text{où} \quad p = \underline{a}a_{1\ 2}^{1\ 2} - bh\underline{a}$$

$a_{1\ 2}^{1\ 2}$ est l'opérateur scalaire de polynôme caractéristique $A_{1\ 2}^{1\ 2}$.

p est donc un opérateur différentiel matriciel à m lignes et 2 colonnes $p = (p_{\overline{F}}^{B})_{\substack{1\leq B\leq m\\ 1\leq \overline{F}\leq 2}}$, et q est aussi différentiel à 2 lignes et 2 colonnes $q = (q_{\overline{D}}^{\overline{F}})_{1\leq \overline{F},\overline{D}\leq 2}$.

Proposition 2.1:

(i) ordre$(p) = 2(m-2)t$

(ii) $P = \underline{A}A_{1\ 2}^{1\ 2}$ est le symbole principal de p.

(iii) ordre(bhq) <ordre$(pa_{1\ 2}^{1\ 2})$

(iv) $\forall \widehat{A} \in \{3, ..., m\}$, $\forall \overline{F} \in \{1, 2\}$, ordre$(h_{B}^{\widehat{A}} p_{\overline{F}}^{B}) \leq 2(m-2)t + t - 2$

preuve: $\underline{a}$ a pour matrice caractéristique $\underline{A} \neq 0$, alors ordre$(\underline{a}) =$ ordre$(a_{1\ 2}^{1\ 2}) = (m-2)t$ et ordre$(\underline{a}a_{1\ 2}^{1\ 2}) = (m-2)t + (m-2)t = 2(m-2)t$. ordre$(bh\underline{a}) \leq (m-3)t + t + (m-2)t = 2(m-2)t$. Calculons la partie d'ordre $2(m-2)t$ de $bh\underline{a}$:

$BH\underline{A} = [A_{1\ 2\ C}^{1\ 2\ B} H_{D}^{C} A_{1\quad 2}^{\overline{F}-1\ D}]_{\substack{1\leq B\leq m\\ 1\leq \overline{F}\leq 2}}$, comme $A_{1\ 2\ C}^{1\ 2\ B} = 0$ si B ou $C \in \{1, 2\}$, on a $A_{1\ 2\ C}^{1\ 2\ B} H_{D}^{C} A_{1\quad 2}^{\overline{F}-1\ D} = A_{1\ 2\ \widehat{C}}^{1\ 2\ B} H_{D}^{\widehat{C}} A_{1\quad 2}^{\overline{F}-1\ D} = 0$ car $H_{D}^{\widehat{C}} A_{1\quad 2}^{\overline{F}-1\ D} = H_{D}^{\widehat{C}} \delta_{\overline{F}}^{D} = 0$ donc $BH\underline{A} = 0$ et ordre$(bh\underline{a}) < 2(m-2)t$.

Ainsi, ordre(p) =ordre$(\underline{a}a_{1\ 2}^{1\ 2}) = 2(m-2)t$ et $P = \underline{A}A_{1\ 2}^{1\ 2}$, ce qui montre (i) et (ii).

(iii) ordre(bhq) ≤ordre$(bh\ \underline{a}a_{1\ 2}^{1\ 2})$ ≺ordre$(\underline{a}(a_{1\ 2}^{1\ 2})^2)$ =ordre$(pa_{1\ 2}^{1\ 2})$

(iv) $p_{\overline{F}}^{B} = \underline{a}_{\overline{F}}^{B} a_{1\ 2}^{1\ 2} - a_{1\ 2\ C}^{1\ 2\ B} h_{D}^{C} \underline{a}_{\overline{F}}^{D}$ et $h_{B}^{\widehat{A}}\ p_{\overline{F}}^{B} = h_{B}^{\widehat{A}} \underline{a}_{\overline{F}}^{B} a_{1\ 2}^{1\ 2} - h_{\widehat{B}}^{\widehat{A}} a_{1\ 2\ \widehat{C}}^{1\ 2\ \widehat{B}} h_{D}^{\widehat{C}} \underline{a}_{\overline{F}}^{D}$, posons $l_{\overline{F}}^{\widehat{A}} = h_{B}^{\widehat{A}}\ \underline{a}_{\overline{F}}^{B}$, donc $h_{D}^{\widehat{C}} \underline{a}_{\overline{F}}^{D} = l_{\overline{F}}^{\widehat{C}}$.

ordre$(l_{\overline{F}}^{\widehat{A}}) \leq t + (m-2)t$, comme $H_{D}^{\widehat{C}} A_{1\quad 2}^{\overline{F}-1\ D} = 0$, alors ordre$(l_{\overline{F}}^{\widehat{A}}) \leq t + (m-2)t - 1$. D'autre part, on a

ordre$(h_{B}^{\widehat{A}}\ p_{\overline{F}}^{B}) \leq t + (m-2)t - 1 + (m-2)t = 2(m-2)t + t - 1$, comme $H_{\widehat{B}}^{\widehat{A}} A_{1\ 2\ \widehat{C}}^{1\ 2\ \widehat{B}} = A_{12}^{12} \delta_{\widehat{C}}^{\widehat{A}}$ (ici $\delta_{\widehat{C}}^{\widehat{A}}$ est le symbole de Kronecker), alors la partie d'ordre $2(m-2)t + t - 1$ de $h_{B}^{\widehat{A}}\ p_{\overline{F}}^{B}$ est $L_{\overline{F}}^{\widehat{A}} A_{1\ 2}^{1\ 2} - A_{1\ 2}^{1\ 2}\ L_{\overline{F}}^{\widehat{C}} \delta_{\widehat{C}}^{\widehat{A}} = L_{\overline{F}}^{\widehat{A}} A_{1\ 2}^{1\ 2} - A_{1\ 2}^{1\ 2}\ L_{\overline{F}}^{\widehat{A}} = 0$, où $(L_{\overline{F}}^{\widehat{A}})$ est la matrice caractéristique de l'opérateur matriciel $(l_{\overline{F}}^{\widehat{A}})$.

Ainsi, ordre$(h_{B}^{\widehat{A}}\ p_{\overline{F}}^{B}) \leq 2(m-2)t + t - 2$. ■

Notre résultat fondamental sur la décomposition de h est:

Proposition 2.2: $q = \overline{a}hp$. Sous l'hypothèse $A_{1\ 2}^{1\ 2}$ non divisible par H', on a l'équivalence entre les deux propositions suivantes:

(i) q est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 2

(ii) hp est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 2

Définition 2.3: q est dit bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 2 si et seulement si il existe 3 opérateurs différentiels matriciels l_0, l_1, l_2 et un opérateur différentiel scalaire h' de symbole principal H' tels que:

(a) $q(x, \partial) = [l_0(h')^2 + l_1 h' + l_2](x, \partial)$

(b) ordre$[(q - l_0(h')^2(x, \partial)] \leq$ ordre$(q) - 1$

(c) ordre$[(q - l_0(h')^2 - l_1 h')(x, \partial)]$ ≤ordre$(q) - 2$

l_0 est tel que sa matrice caractéristique L_0 ne soit pas divisible par H'.

Notation:" q est bien décomposable par rapport à H' de multiplicité 2" sera noté abusivement "q est B.D.2".

Pour démontrer la proposition 2.2, on utilise le lemme suivant:

Lemme 2.4: Soit p un opérateur différentiel matriciel d'ordre inférieur ou égal à T et soit l un opérateur différentiel scalaire d'ordre S de symbole principal non divisible par H'. On pose $q = lp$, on a alors l'équivalence entre les deux propositions suivantes:

(i) Il existe des opérateurs différentiels matriciels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ tels que:

$q = \lambda_0(h')^2 + \lambda_1 h' + \lambda_2$

ordre$[(q - \lambda_0(h')^2(x, \partial)] \prec T + S$

ordre$[(q - \lambda_0(h')^2 - \lambda_1 h')(x, \partial)] \prec T + S - 1$

(ii) Il existe des opérateurs différentiels matriciels l_0, l_1, l_2 tels que:

$p = l_0(h')^2 + l_1 h' + l_2$

ordre$[(p - l_0(h')^2(x, \partial)] \prec T$

ordre$[(p - l_0(h')^2 - l_1 h')(x, \partial)] \prec T - 1$

La démonstration de ce résultat est aisée, elle repose essentiellement sur les téchniques des ordres des opérateurs aux dérivées partielles.

Corollaire 2.5: Sous les mêmes hypothèses du lemme 2.4, on a l'équivalence entre les deux propositions suivantes:

(i) $q = lp$ est B.D.2 par rapport à H'

(ii) p est B.D.2 par rapport à H'

preuve du corollaire 2.5: D'après le lemme 2.4, il reste à démontrer l'équivalence suivante:

$$(\Lambda_0 \ncong 0[H']\ ) \Leftrightarrow (L_0 \ncong 0[H']\ )$$

où le symbole $\ncong 0[H']$ exprime la non divisibilité par rapport au polynôme H', Λ_0 et L_0 sont les matrices caractéristiques respectives des opérateurs λ_0 et l_0.

On note par Q et L les matrices caractéristiques respectives de q et l , on obtient alors,

$$Q = \Lambda_0(H')^2 = LL_0(H')^2$$

ainsi, $\Lambda_0 = LL_0$ et comme $L \ncong 0[H']$, alors $\Lambda_0 \ncong 0[H']$ équivaut à $L_0 \ncong 0[H']$. ■

preuve de la proposition 2.2: On a,

$$q = \overline{a}hp = (q_{\overline{D}}^{\overline{F}})_{1 \leq \overline{F}, \overline{D} \leq 2},\ q_{\overline{D}}^{\overline{F}} = a_{\overline{F}-1}^{1}{}_{\overline{A}}^{2} h_{B}^{\overline{A}} p_{\overline{D}}^{B} + a_{\overline{F}-1}^{1}{}_{\widehat{A}}^{2} h_{B}^{\widehat{A}} p_{\overline{D}}^{B}$$

de plus, $a_{\overline{F}-1}^{1}{}_{\overline{A}}^{2} h_{B}^{\overline{A}} = a_{1}^{1}{}_{2}^{2} h_{B}^{\overline{F}}$, donc $q_{\overline{D}}^{\overline{F}} = a_{1}^{1}{}_{2}^{2} h_{B}^{\overline{F}} p_{\overline{D}}^{B} + a_{\overline{F}-1}^{1}{}_{\widehat{A}}^{2} h_{B}^{\widehat{A}} p_{\overline{D}}^{B}$. D'après la proposition 2.1, on a ordre$(h_{B}^{\widehat{A}} p_{\overline{D}}^{B}) \leq 2(m-2)t + t - 2$, ainsi ($q$ est B.D.2) équivaut ($a_{1}^{1}{}_{2}^{2}[h_{B}^{\overline{F}} p_{\overline{D}}^{B}]_{\overline{F}, \overline{D}}$ est B.D.2), comme $a_{1}^{1}{}_{2}^{2}$ a pour symbole principal $A_{1}^{1}{}_{2}^{2}$ non divisible par H', on a aussi (q est B.D.2) équivaut (hp est B.D.2). ■

3. Hypothèses de bonne décomposition:

Définition 3.1: On dira que h vérifie (D2) si et seulement si l'opérateur matriciel $q = \overline{a}hp$ est bien décomposable par rapport à H' avec la multiplicité 2.

Explicitons cette définition en détérminant les conséquences de (D2). Si h vérifie (D2), alors il existe 3 opérateurs différentiels matriciels l_0, l_1, l_2, tels que $q = [l_0(h')^2 + l_1h' + l_2]$ avec ordre$[(q - l_0(h')^2] < \tau$ et ordre$[(q - l_0(h')^2 - l_1h')] < \tau - 1$. Mais dans une carte locale quelconque q s'écrit $q(x, \partial) = Q(x, \partial) + Q^*(x, \partial) + ...+$(termes d'ordre $\leq \tau - 2$). La partie principale de q est $Q = \overline{A}HP$ où $P = \underline{A}A^{1\,2}_{1\,2}$, donc $Q = \overline{A}H\underline{A}A^{1\,2}_{1\,2}$ et $Q^{\overline{F}}_{\overline{D}} = \gamma^{\overline{F}}_{A}H^{A}_{B}\delta^{B}_{\overline{D}}A^{1\,2}_{1\,2} = (H')^2[A^{1\,2}_{1\,2}]^2\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}$. En identifiant les termes d'ordre τ, on obtient $Q = L_0(H')^2$ où L_0 est la matrice caractéristique de l_0.

$Q^{\overline{F}}_{\overline{D}} = (H')^2L_{0\,\overline{D}}^{\ \ \overline{F}} = (H')^2[A^{1\,2}_{1\,2}]^2\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}$, alors $L_0 = [A^{1\,2}_{1\,2}]^2(\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}})$ et $L_0 \not\equiv 0[H']$ car $A^{1\,2}_{1\,2} \not\equiv 0[H']$ et $(\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}) \not\equiv 0[H']$.

Cherchons maintenant la partie principale de $[(q - l_0(h')^2]$, pour cela nous avons besoin d'abord de la partie homogène Q^* d'ordre $\tau - 1$ de q modulo (H').

$$q^{\overline{F}}_{\overline{D}} = \overline{a}^{\overline{F}}_{A}h^{A}_{B}p^{B}_{\overline{D}}$$
$$(q^{\overline{F}}_{\overline{D}})^* = Q^{*\,\overline{F}}_{\ \ \overline{D}} = (\overline{a}^{\overline{F}}_{A}h^{A}_{B}p^{B}_{\overline{D}})^* = \overline{A}^{\overline{F}}_{A}(h^{A}_{B}p^{B}_{\overline{D}})^* + (\overline{a}^{\overline{F}}_{A})^*H^{A}_{B}P^{B}_{\overline{D}} + \partial^\alpha\overline{A}^{\overline{F}}_{A}\partial_\alpha(H^{A}_{B}P^{B}_{\overline{D}})$$

$P^{B}_{\overline{D}} = \underline{A}^{B}_{\overline{D}}A^{1\,2}_{1\,2} = A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2}A^{1\,2}_{1\,2}$, alors $H^{A}_{B}P^{B}_{\overline{D}} = H^{A}_{B}\delta^{B}_{\overline{D}}A^{1\,2}_{1\,2} \equiv 0[(H')^2]$, d'où $\partial_\alpha(H^{A}_{B}P^{B}_{\overline{D}}) \equiv 0[H']$ et $Q^{*\,\overline{F}}_{\ \ \overline{D}} = \overline{A}^{\overline{F}}_{A}[H^{A}_{B}(P^{B}_{\overline{D}})^* + H^{*\,A}_{\ \ B}P^{B}_{\overline{D}} + \partial^\alpha H^{A}_{B}\partial_\alpha P^{B}_{\overline{D}}]$ modulo (H'). De même $\overline{A}^{\overline{F}}_{A}H^{A}_{B} = A^{1\quad\ 2}_{\overline{F}-1\ A}H^{A}_{B} = \gamma^{\overline{F}}_{A}H^{A}_{B} \equiv 0[(H')^2]$ et $Q^{*\,\overline{F}}_{\ \ \overline{D}} \equiv \overline{A}^{\overline{F}}_{A}[H^{*\,A}_{\ \ B}P^{B}_{\overline{D}} + \partial^\alpha H^{A}_{B}\partial_\alpha P^{B}_{\overline{D}}]$ $[H']$.

$\partial_\alpha P^{B}_{\overline{D}} = \partial_\alpha(A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2}A^{1\,2}_{1\,2}) = A^{1\,2}_{1\,2}\ \partial_\alpha A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2} + A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2}\partial_\alpha A^{1\,2}_{1\,2}$

et $(\partial^\alpha H^{A}_{B})A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2} = \partial^\alpha(H^{A}_{B}A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2}) - H^{A}_{B}\partial^\alpha(A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2}) \equiv -H^{A}_{B}\partial^\alpha A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2}$ $[H']$. Donc $\overline{A}^{\overline{F}}_{A}H^{A}_{B}\partial^\alpha A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2} = A^{1\quad\ 2}_{\overline{F}-1\ A}H^{A}_{B}\partial^\alpha A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2} \equiv 0[H']$. Finalement,

$$Q^{*\,\overline{F}}_{\ \ \overline{D}} \equiv A^{1\,2}_{1\,2}\ A^{1\quad\ 2}_{\overline{F}-1\ A}[H^{*\,A}_{\ \ B}A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2} + \partial^\alpha H^{A}_{B}\partial_\alpha A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2}]\ [H']$$

On a besoin ensuite de la partie homogène d'ordre $(\tau - 1)$ de $l_0(h')^2$ modulo H'. $l_0((h')^2)^* = (l_0)^*(H')^2 + L_0[(h')^2]^* + \partial^\alpha L_0\partial_\alpha(H')^2 \equiv L_0[2H'H'^* + \partial^\alpha H'\partial_\alpha H'] \equiv L_0\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'$ $[H']$. Alors, $[l_0(h')^2)^*]^{\overline{F}}_{\overline{D}} \equiv [A^{1\,2}_{1\,2}]^2\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'$ $[H']$ et le symbole principal de $(q - l_0(h')^2)^{\overline{F}}_{\overline{D}}$ est égal modulo H' à:

$A^{1\,2}_{1\,2}\ A^{1\quad\ 2}_{\overline{F}-1\ A}[H^{*\,A}_{\ \ B}A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2} + \partial^\alpha H^{A}_{B}\partial_\alpha A^{\overline{D}-1B}_{1\quad\ 2}] - [A^{1\,2}_{1\,2}]^2\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'$ qui est aussi égal à L_1H', L_1 est la matrice caractéristique de l_1, donc divisible par H'. On a ainsi établi le résultat suivant:

Proposition 3.2: Si h vérifie (D2), on a dans une carte locale quelconque de X:

$$A_1{}^1{}_2{}^2\; A^1_{\overline{F}-1}{}^2_A[H^*{}^A_B A_1^{\overline{D}-1B}{}_2 + \partial^\alpha H^A_B \partial_\alpha A_1^{\overline{D}-1B}{}_2] - [A_1{}^1{}_2{}^2\;]^2 \mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}} \partial^\alpha H' \partial_\alpha H'$$

est divisible par H', $\forall \overline{F}, \overline{D} \in \{1,2\}$.
Notation: On note

$$\mathcal{K}^{\overline{F}}_{\overline{D}} = A^1_{\overline{F}-1}{}^2_A[H^*{}^A_B A_1^{\overline{D}-1B}{}_2 + \partial^\alpha H^A_B \partial_\alpha A_1^{\overline{D}-1B}{}_2] - A_1{}^1{}_2{}^2\; \mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}} \partial^\alpha H' \partial_\alpha H'$$

Définition 3.3: On dit que h vérifie $(\mathcal{K})$ si et seulement si la matrice $(\mathcal{K}^{\overline{F}}_{\overline{D}})_{1\le \overline{F},\overline{D}\le 2}$ est divisible par H'.

Corollaire 3.4: Si h vérifie (D2), alors h vérifie $(\mathcal{K})$ car $A_1{}^1{}_2{}^2\; \not\equiv 0[H']$.

Remarque 3.5: Pour démontrer que sous l'hypothèse h vérifiant $(L2)$ et $(\mathcal{K})$ le problème de Cauchy est bien posé; on doit comparer les conditions algèbriques $\mathcal{K}^{\overline{F}}_{\overline{D}}$ que nous avons obtenu avec les invariants $K^{\overline{F}}_{\overline{D}}$ trouvés par R. Berzin dans [2] et R. Berzin-J. Vaillant dans [4]. En effet, dans ces articles les $K^{\overline{F}}_{\overline{D}}$ sont donnés par:

$$K^{\overline{F}}_{\overline{D}} = \gamma^{\overline{F}}_A(H^*{}^A_B - \tfrac{1}{2}\partial^\alpha_\alpha H^A_B)\delta^B_{\overline{D}} + \tfrac{1}{2}H^A_B(\partial^\alpha \delta^B_{\overline{D}}\partial_\alpha \gamma^{\overline{F}}_A - \partial_\alpha \delta^B_{\overline{D}}\partial^\alpha \gamma^{\overline{F}}_A)$$

il y est aussi montré que si $K^{\overline{F}}_{\overline{D}} \equiv 0[H']$, alors le problème de Cauchy C^∞ est bien posé.

Montrons que $K^{\overline{F}}_{\overline{D}} \equiv \mathcal{K}^{\overline{F}}_{\overline{D}}\;\; [H']$, $\forall \overline{F}, \overline{D} \in \{1,2\}$.
On a
$H^A_B\partial_\alpha\gamma^{\overline{F}}_A = \partial_\alpha(\gamma^{\overline{F}}_A H^A_B) - (\partial_\alpha H^A_B)\gamma^{\overline{F}}_A \equiv -\gamma^{\overline{F}}_A \partial_\alpha H^A_B\;[H']$
$H^A_B\partial^\alpha\gamma^{\overline{F}}_A \equiv -\gamma^{\overline{F}}_A \partial^\alpha H^A_B\;[H']$
$\gamma^{\overline{F}}_A\partial^\alpha_\alpha[H^A_B\delta^B_{\overline{D}}] = \gamma^{\overline{F}}_A(\partial^\alpha_\alpha H^A_B)\delta^B_{\overline{D}} + \gamma^{\overline{F}}_A\partial^\alpha H^A_B\partial_\alpha\delta^B_{\overline{D}} + \gamma^{\overline{F}}_A\partial_\alpha H^A_B\partial^\alpha\delta^B_{\overline{D}} + \gamma^{\overline{F}}_A H^A_B \partial^\alpha_\alpha\delta^B_{\overline{D}}$

$$\begin{aligned}\gamma^{\overline{F}}_A\partial^\alpha_\alpha[H^A_B\delta^B_{\overline{D}}] &= \gamma^{\overline{F}}_{\overline{A}}\partial^\alpha_\alpha[H^{\overline{A}}_B\delta^B_{\overline{D}}] + \gamma^{\overline{F}}_{\widehat{A}}\partial^\alpha_\alpha[H^{\widehat{A}}_B\delta^B_{\overline{D}}]\\ &= A_1{}^1{}_2{}^2\;\partial^\alpha_\alpha[\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}(H')^2] \equiv 2A_1{}^1{}_2{}^2\;\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'\;[H']\end{aligned}$$

alors,
$K^{\overline{F}}_{\overline{D}} \equiv \gamma^{\overline{F}}_A H^*{}^A_B\delta^B_{\overline{D}} - \frac{1}{2}\gamma^{\overline{F}}_A[\partial^\alpha_\alpha H^A_B]\delta^B_{\overline{D}} - \frac{1}{2}\gamma^{\overline{F}}_A\partial^\alpha\delta^B_{\overline{D}}\partial_\alpha H^A_B + \frac{1}{2}\gamma^{\overline{F}}_A\partial^\alpha H^A_B\partial_\alpha\delta^B_{\overline{D}} \equiv$

$$\begin{aligned}&\gamma^{\overline{F}}_A H^*{}^A_B\delta^B_{\overline{D}} + \tfrac{1}{2}\gamma^{\overline{F}}_A\partial^\alpha H^A_B\partial_\alpha\delta^B_{\overline{D}} - \tfrac{1}{2}\gamma^{\overline{F}}_A\partial^\alpha_\alpha[H^A_B\delta^B_{\overline{D}}] + \tfrac{1}{2}\gamma^{\overline{F}}_A\partial^\alpha H^A_B\partial_\alpha\delta^B_{\overline{D}}\\ &\equiv \gamma^{\overline{F}}_A[H^*{}^A_B\delta^B_{\overline{D}} + \partial^\alpha H^A_B\partial_\alpha\delta^B_{\overline{D}}] - A_1{}^1{}_2{}^2\;\mathcal{A}^{\overline{F}}_{\overline{D}}\partial^\alpha H'\partial_\alpha H'\;[H'] = \mathcal{K}^{\overline{F}}_{\overline{D}}\end{aligned}$$

4. Résolution du problème de Cauchy $\mathbf{C^\infty}$:

Si h vérifie (D2) par le même procédé appliqué à h, on montre que l'adjoint formel $\widehat{h}$ de h (cf. [15]) satisfait aussi à (D2), donc l'invariant $\mathcal{K} = (\mathcal{K}^{\overline{F}}_{\overline{D}})$ relatif à $\widehat{h}$ est divisible par H'. Ceci permet d'affirmer l'unicité de la solution du problème de Cauchy associé à h.

Le résultat principal de cet article est:

Théorème 4.1: Si h vérifie (L2), une condition nécessaire et suffisante pour que le problème de Cauchy soit bien posé est que h vérifie $(\mathcal{K})$.

Conditions suffisantes de résolution:

Si h vérifie (L2) et $(\mathcal{K})$, le problème de Cauchy est bien posé. Ceci résulte de la construction pour h et son adjoint $\widehat{h}$ d'une parametrix par la méthode des opératurs intégraux de Fourier(cf. [2], [4], [8], [12]).

Conditions nécessaires de résolution:

On adopte ici une autre formulation équivalente de la définition 1.1, en remplaçant les conditions initiales par une condition de support. On suppose que l'hyperplan $x_0 = T$ est non caractéristique pour h, alors le problème de Cauchy pour h est bien posé si et seulement si:

(a') $\forall f_0 \in C^\infty(X, C^m)$, support$(f_0) \subset \overline{X}_T^+$, $\exists U_0 \in C^\infty(X, C^m)$ telle que:

$$hU_0 = f_0 \text{ et support}(U_0) \subset \overline{X}_T^+$$

(b')=(b) $\forall T, T'$ tels que $0 \leq T < T' < T^+$, $\forall U \in D'(X)$,

$$(hU = 0 \text{ dans } X_{T'}^- \text{ et support}(U) \subset \overline{X}_T^+) \Rightarrow (U = 0 \text{ dans } X_{T'}^-)$$

La démonstration de l'équivalence entre (a) et (a') utilise le théorème de Borel. Pour établir que la condition $(\mathcal{K})$ est nécessaire à la résolution du problème de Cauchy hyperbolique, on utilise le lemme de V. Ivrii et V.M. Petkov.

Lemme 4.2 (V. Ivrii- V.M. Petkov [10]): Si le problème de Cauchy est bien posé pou h, alors pour tout compact W de X, il existe une constante $C > 0$ et des entiers p, q tels que:

$\forall T' > T,\ \|U\|_{H^p(W_{T'}^-, C^m)} \leq C \|hU\|_{H^q(W_{T'}^-, C^m)}$, où $U \in C_0^\infty(W_T^+, C^m)$ et $W_{T'}^- = W \cap \{x \in X;\ x < T'\}$.

Comme conséquence de ce lemme, on détermine une condition pour qu'un problème de Cauchy ne soit pas bien posé. Introduisons pour cela le changement de variables $y_j = x_j \rho^{s_j}$, $j = 0, 1, ...n$, avec $\rho > 0$, $s_j > 0$. Soient W un compact de X, $0 \leq T < T'$, et l'application $W_{T'}^- \ni x \mapsto y = (y_0, ..., y_n) = (x_0\rho^{s_0}, ..., x_j\rho^{s_j}, ..., x_n\rho^{s_n})$, $x_j = y_j\rho^{-s_j}$, donc si ρ est assez grand $y \in W_{T'}^-$. Il existe alors $\rho(W, T') > 0$, tel que $\forall \rho > \rho(W, T')$, $x_j = y_j\rho^{-s_j}$, $\forall j \in \{0, ..., n\}$, définit un changement de variables dans $W_{T'}^-$. D'après le lemme d'Ivrii et Petkov, si u désigne la solution du problème de Cauchy dans $C_0^\infty(W_T^+, C^m)$, il existe deux entiers p et q et une constante C positive tels que

$$\|u\|_{H^p(W_{T'}^-, C^m)} \leq C \|hu\|_{H^q(W_{T'}^-, C^m)} \qquad \text{(In1)}$$

L'opérateur $h(x, \partial_x) = (h_B^A(x, \partial_x))_{1 \leq A, B \leq m}$ est transformé en un opérateur matriciel (m, m) d'ordre t, dépendant de ρ qu'on notera $h_\rho(y, \partial_y)$. Si $h_B^A(x, \partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq t} a_{\alpha B}^A(x)\partial_x^\alpha$, alors $\partial_{x_j} = \partial_{y_j}\frac{dy_j}{dx_j} = \rho^{s_j}\partial_{y_j}$, $j = \{0, ..., n\}$ et

$$h_{\rho B}^A(y, \partial_y) = \sum_{|\alpha| \leq t} a_{\alpha B}^A(y_0\rho^{-s_0}, ..., y_j\rho^{-s_j}, ..., y_n\rho^{-s_n})\rho^{\alpha_0 s_0 + ... + \alpha_n s_n}\partial_{y_0}^{\alpha_0} ... \partial_{y_n}^{\alpha_n},$$
$$\alpha = (\alpha_0, ..., \alpha_n)$$

$\rho^{\alpha_0 s_0+...+\alpha_n s_n} \leq \rho^{t\widehat{s}}$ où $\widehat{s}$ =max$\{s_j;\ 0 \leq j \leq n\}$; $\rho > \rho(W, T')$.

D'après (In1) et la définition de h_ρ, on a:

$$\|v\|_{H^p(W^-_{T'}, C^m)} \leq C'\rho^\theta \, \|h_\rho v\|_{H^q(W^-_{T'}, C^m)} \qquad \text{(In2)}$$

où θ dépend de p, q, t et $\widehat{s}$ et $v \in C_0^\infty(W_T^+, C^m)$, v est la transformée de u par le changement de variable précédent.

Essayons maintenant de construire une solution asymptotique u_ρ sous la forme:

$$u_\rho = \sum_{j=0}^{N} v_j(y)\rho^{-j/\tau} E(y, \rho)$$

$$E(y, \rho) = \exp i(l^0(y)\rho + \sum_{k=0}^{\nu-1} l^{k+1}(y)\rho^{(\nu-k)/\tau})$$

où $\nu, \tau \in IN$, $1 \leq \nu \leq \tau$, et $v_j(y) = (v_j^1(y), ..., v_j^m(y)) \in C_0^\infty(W, C^m)$, $v_0(0) \neq 0$, les fonctions l^k sont scalaires C^∞ sur W à valeurs réelles.

(i) Si $2p > (n + 1)$, d'après le théorème de Sobolev, $H^p(W^-_{T'}, C^m)$ s'injecte continuement dans l'espace $C^0(W^-_{T'}, C^m)$, on peut alors remplacer la H^p-norme dans (In2) par la C^0-norme.

(ii) Si $2p \leq (n + 1)$; soit $M(y, \partial_y)$ un opérateur scalaire strictement hyperbolique d'ordre p' tel que $2(p + p') > (n + 1)$ et $M_{p'}(y, \mathrm{grad}_y l^0) \neq 0$ dans W, où $M_{p'}$ est le polynôme caractéristique de $M(y, \partial_y)$. On construit pour l'opérateur $\mathcal{M}$=$IM(y, \partial_y)$, I étant la matrice unité (m, m), la solution asymptotique w_ρ de l'équation $\mathcal{M} w_\rho = \rho^{p'} u_\rho$, avec $w_\rho(y) = \sum_{j=0}^{N} w_j(y)\rho^{-j/\tau} E(y, \rho)$, $w_j \in C_0^\infty(W, C^m)$, $w_0(0) \neq 0$. Cette construction est toujours possible. En effet, posons

$$u_j(y, \rho) = w_j(y)\rho^{-j/\tau}(i\rho)^j \exp i(\sum_{k=0}^{\nu-1} l^{k+1}(y)\rho^{(\nu-k)/\tau})$$

et $w_\rho(y) = \sum_{j=0}^{N} u_j(y, \rho)\frac{\exp i\rho l^0(y)}{(i\rho)^j}$, d'autre part si on pose $f_j(\xi) = \frac{\exp(i\rho\xi)}{(i\rho)^j}$, alors f_j est de classe C^∞ sur IR et vérifie $f_j^{'}(\xi) = f_{j-1}(\xi)$. On a (cf. [6]):

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^A_B w^B &= \sum_{l\geq 0} \sum_{r+j=l} \mathcal{M}^{A,r}_B(l^0)[u^B_j](f_{-p'+l} \circ l^0) \\ &= \rho^{p'} \sum_{j=0}^{N} v^A_j(y)\rho^{-j/\tau} E(y, \rho) \qquad (\mathcal{E}1)\end{aligned}$$

où $(\mathcal{M}^{A,r}_B(l^0))_r$ est la famille d'opérateurs matriciels associés à l'opérateur matriciel $\mathcal{M}$ et la fonction réelle l^0, avec

$\mathcal{M}^{A,0}_B(l^0) = M^A_B(y, \mathrm{grad}_y l^0(y))$; M est la matrice caractéristique de $\mathcal{M}$.

$\mathcal{M}^{A,1}_B(l^0) = \partial^\alpha M^A_B(y, \mathrm{grad}_y l^0(y))\partial_\alpha + M^{*A}_B(y, \mathrm{grad}_y l^0(y))$

$\mathcal{M}_B^{A,2}(l^0) \quad = \quad \frac{1}{2!}\partial^{\alpha\beta}M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))\partial_{\alpha\beta} \quad + \quad \partial^\alpha M_B^{*A}(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))\partial_\alpha$ $+M_B^{**A}(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))$

$\mathcal{M}_B^{A,3}(l^0) = \frac{1}{3!}\partial^{\alpha\beta\gamma}M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))\partial_{\alpha\beta\gamma} + \frac{1}{2!}\partial^{\alpha\beta}M_B^{*A}(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))\partial_{\alpha\beta} + \partial^\alpha M_B^{**A}(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))\partial_\alpha$

$+M_B^{***A}(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))$

et ainsi de suite.........

Dans $(\mathcal{E}1)$ on identifie les coéfficients faisant intervenir les mêmes puissances de ρ, on trouve:

(i) $(l = 0) \Leftrightarrow (r = j = 0)$

$$\begin{gathered}\mathcal{M}_B^{A,0}(l^0)[u_0^B](f_{-p'} \circ l^0) = M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))u_0^B(i\rho)^{p'} \exp i\rho l^0(y)\\ = M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))w_0^B(y)E(y,\rho)(i\rho)^{p'} = E(y,\rho)\rho^{p'}v_0^A(y)\end{gathered}$$

donc $M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))w_0^B(y) = (i)^{p'}v_0^A(y), \forall A \in \{1,...m\}$, qui est un système de m inconnues dont le déterminant est égal à

$$\det M(y,\mathrm{grad}_y l^0(y)) = (M_{p'}(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))^m \neq 0$$

on peut donc déterminer $w_0(y)$ pour tout $y \in W$ avec la condition $w_0(0) \neq 0$.

(ii) $(l = 1) \Leftrightarrow (r = 0, j = 1$ ou $r = 1, j = 0)$

$r = 0, j = 1$:

$$\begin{gathered}\mathcal{M}_B^{A,0}(l^0)[u_1^B](f_{-p'+1} \circ l^0) = M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))u_1^B(i\rho)^{p'-1} \exp i\rho l^0(y)\\ = M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))w_1^B(y)E(y,\rho)(i\rho)^{p'}\rho^{-1/\tau}\end{gathered}$$

$r = 1, j = 0$:

$$\begin{gathered}\mathcal{M}_B^{A,1}(l^0)[u_0^B](f_{-p'+1} \circ l^0) =\\ \left\{\partial^\alpha M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))\partial_\alpha u_0^B + M_B^{*A}(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))u_0^B\right\}(f_{-p'+1} \circ l^0)\\ = \partial^\alpha M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))\partial_\alpha w_0^B(y)E(y,\rho)(i\rho)^{p'-1} +\\ \partial^\alpha M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))w_0^B(y)(i\sum_{k=0}^{\nu-1}\partial_\alpha l^{k+1}(y)\rho^{(\nu-k)/\tau}E(y,\rho)(i\rho)^{p'-1}\\ +M_B^{*A}(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))w_0^B E(y,\rho)(i\rho)^{p'-1}\end{gathered}$$

on choisira $\nu = \tau - 1$, $(\nu,\tau) \in IN^2$, alors la seule expression en $\rho^{-1/\tau}$ dans la somme précédente est obtenue pour $k = 0$; après identification on a:

$$\begin{gathered}M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))w_1^B(y)E(y,\rho)(i\rho)^{p'}\rho^{-1/\tau}+\\ \partial^\alpha M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))w_0^B(y)E(y,\rho)(i\rho)^{p'-1}i\partial_\alpha l^1(y)\rho^{1-1/\tau}\\ = \rho^{p'}v_1^A(y)\rho^{-1/\tau}E(y,\rho)\end{gathered}$$

alors,

$M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))w_1^B(y)+\partial^\alpha M_B^A(y,\mathrm{grad}_y l^0(y))\partial_\alpha l^1(y)w_0^B(y) = (i)^{-p'}v_1^A(y)$

ce qui détermine simultanément l^1 et w_1 sur W. Ainsi de suite on arrive à trouver $l^2,...,l^\nu$ et $w_2,...w_N$.

$\rho^{p'} \|u_\rho\|_{H^p(W^-_{T'},C^m)} = \left\|\mathcal{M}w_\rho - (\mathcal{M}w_\rho - \rho^{p'} u_\rho)\right\|_{H^p(W^-_{T'},C^m)}$, ici nous utilisons les estimations pour les opérateurs strictement hyperboliques et les théorèmes d'inclusion des H^p dans les C^k, nous en déduisons alors l'existence d'une constante $C_3 > 0$, et $N_2 \in IN$, tels que:

$\rho^{p'} \|u_\rho\|_{H^p(W^-_{T'},C^m)} \geq C_3 \|w_\rho\|_{C^0(W^-_{T'},C^m)} - o(\rho^{-N_2}) \|E(y,\rho)\|_{C^0(W^-_{T'},C^m)}$ (In3)

Choisissons alors $\widehat{y} = (T', 0, ...0) \in W$ et faisons l'hypothèse supplémentaire: $\forall y \in W^-_{T'}$,

$$\mathrm{Im}[l^0(y)\rho + \sum_{k=0}^{\nu-1} l^{k+1}(y)\rho^{(\nu-k)/\tau}] \geq$$
$$[\varepsilon_0\rho + \rho^{\nu/\tau}(\varepsilon_1 - o(1))][(T' - y_0) + |\widehat{y}' - y'|^2] - C_4 \quad \text{(In4)}$$

où $y = (y_0, y'), \widehat{y} = (T', \widehat{y}')$, $C_4 \geq 0$, $\varepsilon_0 \geq 0$, $\varepsilon_1 \geq 0$, $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 > 0$, $o(1)$ désigne les termes contenant les puissances négatives de ρ.

Alors d'après (In2) et (In3), on a pour ρ assez grand

$$C_3 \|w_\rho\|_{C^0(W^-_{T'},C^m)} \leq \rho^{p'} \|w_\rho\|_{H^p(W^-_{T'},C^m)} + o(\rho^{-N_2}) \|E(y,\rho)\|_{C^0(W^-_{T'},C^m)}$$
$$\|w_\rho\|_{C^0(W^-_{T'},C^m)} \leq C_5\rho^{\theta+p'} \|h_\rho u_\rho\|_{C^{q'}(W^-_{T'},C^m)} +$$
$$o(\rho^{-N_2}) \|E(y,\rho)\|_{C^0(W^-_{T'},C^m)} \quad \text{(In5)}$$

Pour $2p > (n+1)$, on a $w_\rho = u_\rho$ et $p' = 0$, l'inégalité (In5) reste alors satisfaite. Dans (In5), on a remplacé la H^p-norme par la C^q-norme avec $q' = \max(q, 0)$.

Pour montrer que le problème de Cauchy n'est pas bien posé il suffit alors de vérifier que (In5) n'est pas satisfaite en construisant dans un voisinage W_1 de $\widehat{y}$ une solution u_ρ avec $E(y,\rho)$ vérifiant (In4) et $h_\rho(\phi u_\rho) = \overrightarrow{o}(\rho^{-N_3})E(y,\rho)$, N_3 convenable, $\overrightarrow{o}(\rho^{-N_3}) = (o(\rho^{-N_3}), ..., o(\rho^{-N_3}))$ $m-$uple et $\phi \in C_0^\infty(W)$, $\phi = 1$ sur W_1, $\widehat{y} \in W_1 \subset W$. On peut donc trouver un entier N tel que $\|\phi w_\rho\|_{C^0(W^-_{T'},C^m)} \geq 1$ pour ρ assez grand, ce qui contredit (In5), car:

$$1 \leq \|\phi u_\rho\|_{C^0(W^-_{T'},C^m)} \leq o(\rho^{-N_4}) \|E(y,\rho)\|_{C^0(W^-_{T'},C^m)}$$

or $|E(y,\rho)| \leq \exp(-\{[\varepsilon_0\rho + \rho^{\nu/\tau}(\varepsilon_1 - o(1))][(T' - y_0) + |\widehat{y}' - y'|^2] - C_4\})$, pour un choix convenable de ε_1, on a, $\lim_{\rho\to+\infty} |E(y,\rho)| \leq \exp C_4$. Ainsi, lorsque $\rho \to +\infty$; $o(\rho^{-N_2}) \|E(y,\rho)\|_{C^0(W^-_{T'},C^m)} \prec 1$. On vient de démontrer la:

Proposition 4.3: S'il existe dans un voisinage W de y une solution asymptotique, pour $\rho \to +\infty$, u de la forme:

$$u(x,\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_{t+j}(x)\rho^{-j/\tau}E(x,\rho)$$

où $\tau \in IN$, $\rho \in IR$, $Y_{t+j} \in C_0^\infty(W, C^m)$, $Y_t(y) \neq 0$, $E(x,\rho) = \exp i(l^0(x)\rho + \sum_{k=0}^{\nu-1} l^{k+1}(x)\rho^{(\nu-k)/\tau})$, $\nu \in IN$, $1 \leq \nu \leq \tau$. l_0, l^1, ..., l^ν sont des fonctions scalaires réelles de classe C^∞ sur W, telles que pour $\varepsilon > 0$ convenable, pour tout $x^0 \leq y^0$, $x = (x^0, x')$, $y = (y^0, y')$:

$$\mathrm{Im}[l^0(x)\rho + \sum_{k=0}^{\nu-1} l^{k+1}(x)\rho^{(\nu-k)/\tau}] \geq \rho^{\nu/\tau}(\varepsilon - o(1))[(y^0 - x^0) + |y' - x'|^2]$$

alors le problème de Cauchy n'est pas bien posé au voisinage de y. ■

Théorème 4.4: Si h vérifie (L2) et si le problème de Cauchy est bien posé alors h vérifie $(\mathcal{K})$.

preuve: Montrons d'abord que s'il existe un point y et une fonction réelle ϕ définie dans un voisinage de y sur lequel on ait $H'(x,\ \mathrm{grad}\phi(x)) = 0$ et $\mathcal{K}(y,\ \mathrm{grad}\phi(y)) \neq 0$, alors le problème de Cauchy n'est pas bien posé dans ce voisinage. En effet, ceci s'obtient à partir de la proposition 4.3, on cherchera u sous la forme:

$$u(x,\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} Y_{t+j}(x)\rho^{-j/2} \exp i[\rho\phi_0(x) + \rho^{1/2}\psi(x)] \quad (\tau = 2,\ \nu = 1,\ k = 0)$$

Il sera en fait plus commode d'écrire cette expression sous la forme $u(x,\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x,\rho)(i\rho)^{-j} \exp i\rho\phi_0(x)$ pour que hu se calcul d'une manière facile; on explicite ensuite les coefficients des $\rho^{t-j/2}$, $0 \leq j \leq 3$ et on les annule. Choisissons tout de suite $\phi_0 = \delta\phi$, $\delta = \pm 1$, ϕ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 4.3, et vérifiant les équations caractéristiques imposées.

Considérons $S = \{x \in X;\ \phi(x) = 0\}$ une hypersurface de X de dimension n; alors en tout point x de S il existe une carte locale (U, θ) de X, telle que $S \cap U = \{x \in U;\ \theta^0(x) = x^0 = 0\}$ où $\theta = (\theta^0, \theta^1, ..., \theta^n)$, $\theta(x) = (x^0, x^1, ..., x^n)$, on a ici $\theta^0(x) = \phi(x)$. De plus, $(S \cap U,\ \theta^1 |_{S\cap U}, ..., \theta^n |_{S\cap U}) \in \mathrm{atl}(S, x)$, dans la suite on considère les expressions locales dans ces deux cartes de X et S. On note $H(\phi) = H(x,\ \mathrm{grad}\phi(x))$, $A_{1\ 2}^{1\ 2}\ (\phi) = A_{1\ 2}^{1\ 2}\ (x,\ \mathrm{grad}\phi(x))$,...

(a) coefficient de ρ^0 :

$$H(\phi)Y_t = 0 \qquad (\mathcal{E}2)$$

(b) le coefficient de $\rho^{-1/2}$ s'obtient en prenant $l = 1$ dans l'expression hu, or $l = 1$ correspond à $r = 0$, $j = 1$ ou $r = 1$, $j = 0$.

$r = 0$, $j = 1$:

$$\begin{aligned} h_B^{A,0}(\phi_0)[u_1^B](f_{-t+1} \circ \phi_0) &= H_B^A(\phi_0)u_1^B(x,\rho)(i\rho)^{t-1} \exp\{i\rho\phi_0(x)\} \\ &= H_B^A(\phi_0)Y_{t+1}^B(x)\rho^{-1/2}(i\rho)^t \exp i[\rho\phi_0(x) + \rho^{1/2}\psi(x)] \end{aligned}$$

$r = 1$, $j = 0$:

$$\begin{gathered} h_B^{A,1}(\phi_0)[u_0^B](f_{-t+1} \circ \phi_0) = \\ \{\partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha u_0^B(x,\rho) + H_B^{*A}(\phi_0)u_0^B(x,\rho)\}(i\rho)^{t-1} \exp\{i\rho\phi_0(x)\} \\ = \{\partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha Y_t^B(x)(i\rho)^{t-1} + \partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha\psi(x)Y_t^B(x)\rho^{-1/2}(i\rho)^t + \\ H_B^{*A}(\phi_0)Y_t^B(x)(i\rho)^{t-1}\} \exp i[\rho\phi_0(x) + \rho^{1/2}\psi(x)] \end{gathered}$$

en isolant les coefficients de $\rho^{-1/2}$, on a:

$$H(\phi)Y_{t+1} + \partial^\alpha H(\phi)\partial_\alpha\psi\delta Y_t = 0 \qquad (\mathcal{E}3)$$

(c) coefficient de ρ^{-1}, il s'agit du cas $l = 2$, soit $r = 0$, $j = 2$; $r = 1$, $j = 1$; ou $r = 2$, $j = 0$.

$r = 0$, $j = 2$:

$$\begin{gathered} h_B^{A,0}(\phi_0)[u_2^B](f_{-t+2}\circ\phi_0) = H_B^A(\phi_0)u_2^B(x,\rho)(i\rho)^{t-2}\exp\{i\rho\phi_0(x)\} \\ = H_B^A(\phi_0)Y_{t+2}^B(x)\rho^{-1}(i\rho)^t\exp i[\rho\phi_0(x)+\rho^{1/2}\psi(x)] \end{gathered}$$

$r = 1$, $j = 1$:

$$\begin{gathered} h_B^{A,1}(\phi_0)[u_1^B](f_{-t+2}\circ\phi_0) = \\ \{\partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha u_1^B(x,\rho) + H_B^{*A}(\phi_0)u_1^B(x,\rho)\}(i\rho)^{t-2}\exp\{i\rho\phi_0(x)\} \\ = \{\partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha Y_{t+1}^B(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t + \partial^\alpha H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha\psi(x)Y_{t+1}^B(x)\rho^{-1}(i\rho)^t + \\ H_B^{*A}(\phi_0)Y_{t+1}^B(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t\}\exp i[\rho\phi_0(x)+\rho^{1/2}\psi(x)] \end{gathered}$$

$r = 2$, $j = 0$:

$$\begin{gathered} h_B^{A,2}(\phi_0)[u_0^B](f_{-t+2}\circ\phi_0) = \{\tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_{\alpha\beta}Y_t^B(x)(i\rho)^{-2}(i\rho)^t + \\ \tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha\psi(x)\partial_\beta Y_t^B(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t \\ +\tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha Y_t^B(x)\partial_\beta\psi(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t + \\ \tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_{\alpha\beta}\psi(x)Y_t^B(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t \\ +\tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_\alpha\psi(x)\partial_\beta\psi Y_t^B(x)\rho^{-1}(i\rho)^t + \partial^\alpha H_B^{*A}(\phi_0)\partial_\alpha Y_t^B(x)(i\rho)^{-2}(i\rho)^t \\ +\partial^\alpha H_B^{*A}(\phi_0)\partial_\alpha\psi(x)Y_t^B(x)(-i)\rho^{-3/2}(i\rho)^t + \\ H_B^{**A}(\phi_0)Y_t^B(x)(i\rho)^{-2}(i\rho)^t\}\exp i[\rho\phi_0(x)+\rho^{1/2}\psi(x)] \end{gathered}$$

en isolant les coefficients de ρ^{-1}, on a:

$$\begin{gathered} H(\phi)Y_{t+2} + \partial^\alpha H(\phi)\partial_\alpha\psi\delta Y_{t+1} + \{\tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H(\phi)\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi - \\ i\delta(\partial^\alpha H(\phi)\partial_\alpha + H^*(\phi))\}Y_t = 0 \qquad (\mathcal{E}4) \end{gathered}$$

(d) les coefficients de $\rho^{-3/2}$, s'obtiennent par le même procédé:

$$\begin{gathered} H(\phi)Y_{t+3} + \delta\partial^\alpha H(\phi)\partial_\alpha\psi Y_{t+2} + \\ \{\tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H(\phi)\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi - i\delta(\partial^\alpha H(\phi)\partial_\alpha + H^*(\phi))\}Y_{t+1} + \\ \{\tfrac{1}{3!}\partial^{\alpha\beta\gamma}H(\phi)\delta\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi\partial_\gamma\psi - i[\partial^{\alpha\beta}H(\phi)\partial_\beta\psi\partial_\alpha + \partial^\alpha H^*(\phi)\partial_\alpha\psi + \\ \tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H_B^A(\phi_0)\partial_{\alpha\beta}\psi]\}Y_t = 0 \qquad (\mathcal{E}5) \end{gathered}$$

<u>**Résolution des équations** ($\mathcal{E}2$), ($\mathcal{E}3$), ($\mathcal{E}4$), **et** ($\mathcal{E}5$) (cf. [4], [15]):</u>

On résout ($\mathcal{E}2$), $Y_t^{\overline{D}}$, $1 \le \overline{D} \le 2$, étant pour l'instant arbitraires, on ne répétera pas toujours la lettre ϕ:

$$Y_t^B = \sum_{\overline{D}=1}^{2} \frac{A_1^{\overline{D}-1}{}_2^B}{A_{12}^{12}} Y_t^{\overline{D}}$$

On conviendra aussi d'omettre $\sum$ dans les conditions analogues à celles de cette formule. On remarque que $(\mathcal{E}3)$ est possible en multipliant par $A^{1\ \ 2}_{\overline{A}-1\ F}$ et en utilisant le fait que $A^{1\ \ 2}_{\overline{A}-1\ F}H^F_B = 0$ et $A^{1\ \ 2}_{\overline{A}-1\ F}\partial^\alpha H^F_B A^{\overline{D}-1\ B}_{1\ \ \ 2} = 0$.

Resolvons $(\mathcal{E}3)$, on obtient:

$$Y^B_{t+1} = [\frac{A^{\overline{D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{A^{12}_{12}}]Y^{\overline{D}}_{t+1} + \delta\partial^\alpha[\frac{A^{\overline{D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{A^{12}_{12}}]\partial_\alpha\psi Y^{\overline{D}}_t$$

déterminons maintenant la condition de compatibilité de $(\mathcal{E}4)$ en multipliant par $A^{1\ \ 2}_{\overline{A}-1\ F}$:

$$A^{1\ \ 2}_{\overline{A}-1\ F}[\partial^\alpha H^F_B\partial_\alpha\psi\delta Y^B_{t+1}+$$
$$\tfrac{1}{2}\partial^{\alpha\beta}H^F_B\partial_\alpha\psi\partial_\beta\psi Y^B_t] = i\delta A^{1\ \ 2}_{\overline{A}-1\ F}[\partial^\alpha H^F_B\partial_\alpha Y^B_t + H^{*F}_B Y^B_t]$$

on reporte les valeurs de Y^B_{t+1} et Y^B_t, et on pose $p = d_\xi H'(x, \mathrm{grad}\phi(x))$, on a:

$$A^{12}_{12}[p^\alpha\partial_\alpha\psi]^2\mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}}Y^{\overline{D}}_t = i\delta\mathcal{K}^{\overline{A}}_{\overline{D}}Y^{\overline{D}}_t,\ \overline{A} = 1, 2$$

cette équation est résoluble quel que soit $Y^{\overline{D}}_t$, $\overline{D} = 1, 2$, si $A^{12}_{12}[p^\alpha\partial_\alpha\psi]^2\mathcal{A} = i\delta\mathcal{K}$, avec $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}})$ et $\mathcal{K} = (\mathcal{K}^{\overline{A}}_{\overline{D}})$, $\mathcal{A} \neq 0$, $\mathcal{K} \neq 0$, donc $[p^\alpha\partial_\alpha\psi] \neq 0$ dans un voisinage de y.

On détermine alors ψ, δ, W, de sorte que cette condition soit réalisée et que $\mathrm{Im}\,\psi$ vérifie l'inégalité (In4). On résout $(\mathcal{E}4)$, on obtient:

$$Y^B_{t+2} = \frac{A^{\overline{D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{A^{12}_{12}}Y^{\overline{D}}_{t+2} + \delta\partial^\alpha[\frac{A^{\overline{D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{A^{12}_{12}}]\partial_\alpha\psi Y^{\overline{D}}_{t+1} - i\delta\partial^\alpha[\frac{A^{\overline{D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{A^{12}_{12}}]\partial_\alpha Y^{\overline{D}}_t + G^{B,\overline{D}}Y^{\overline{D}}_t$$

où $G^{B,\overline{D}}$ sont des coefficients réguliers.

Ecrivons aussi que $(\mathcal{E}5)$ est compatible en multipliant par $A^{1\ \ 2}_{\overline{A}-1\ F}$ et reportons les expressions de Y^B_{t+2}, Y^B_{t+1}, Y^B_t, on a:

$$iA^{1\ \ 2}_{\overline{A}-1\ F}\{\partial^{\alpha\beta}[H^F_B\frac{A^{\overline{D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{A^{12}_{12}}] - H^F_B\partial^{\alpha\beta}[\frac{A^{\overline{D}-1\ B}_{1\ \ \ 2}}{A^{12}_{12}}]\}\partial_\alpha\psi\partial_\beta Y^{\overline{D}}_t + W^{\overline{D}}Y^{\overline{D}}_t = 0$$

alors,

$$2i\mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}}p^\alpha\partial_\alpha\psi p^\beta\partial_\beta Y^{\overline{D}}_t + W^{\overline{D}}Y^{\overline{D}}_t = 0, \overline{A} = 1, 2$$

où les $W^{\overline{D}}$ sont des coefficients réguliers. On transforme ce système de façon à avoir un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre. On utilise pour cela le résultat de géométrie suivant qu'on admettra:

Proposition 4.5: Soient $X_1, ..., X_k$, k champs de vecteurs de classe C^∞ définis dans un voisinage V d'un point x_0 de la variété X, $(n+1) \geq k$, tels que:

(i) $X_1(x), ..., X_k(x)$ soient linéairement indépendants, $\forall x \in V$

(ii) le crochet de Lie $[X_i,\, X_j] = 0$ dans V, pour tout $i, j = 1, ..., k$

alors il existe une carte locale (W, Ψ) $\in$atl(X, x_0), telle que $X_{i|W} = \partial_i = \widetilde{\Psi_x}^{-1}(0, ..., 1, ...0)$, 1 est à la ième place, où $\widetilde{\Psi_x} : T_xX \to IR^{n+1}$ est la bijection qui a un vecteur du fibré tangent T_xX associe ses composantes par rapport à la carte (W, Ψ). ■

A partir de l'hypothèse $p = (p^\alpha)_{0\leq\alpha\leq n}$ non nul, on en déduit que p définit un champ de vecteurs de classe C^∞ sur X tel que (i) et (ii) soient vérifiées car $[p, p] = 0$. Ainsi, il existe d'après la proposition 4.5 une carte locale (W, Ψ), telle que $x \in W$ et $p_{|W} = \partial_{0|W} = \widetilde{\Psi_x}^{-1}(1, 0, ..., ...0)$. Dans cette carte locale on a:

$$2i\mathcal{A}^{\overline{A}}_{\overline{D}}\partial_0 Y_t^{\overline{D}}\partial_0\psi + W^{\overline{D}}Y_t^{\overline{D}} = 0, \overline{A} = 1, 2$$

qui est un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre le long des bicaractéristiques relatives à $H'(p = d_\xi H'(x, \text{grad}\phi(x))$. Y_t^1 et Y_t^2 peuvent être donc choisis satisfaisant aux hypothèses du lemme 4.2 de V. Ivrii et V.M. Petkov.

On en déduit alors Y_t^B, puis en itérant ce procédé les Y_{t+j}^B pour tout j et par suite une solution asymptotique convenable. Ainsi on a la condition nécessaire en remarquant que si $\mathcal{K}(x, \xi)$ s'annule dès que $H'(x, \xi)$ s'annule, alors $\mathcal{K}$ est divisible par H'.

Bibliographie

[1] R. Berzin: "Ondes asymptotiques et problème de Cauchy à données singulières pour un système d'équations linéaires avec une caractéristique double" C.R.A.S. Paris, tome 275, Série A, p1091-1094, 1972

[2] R. Berzin: "Le problème de Cauchy pour un système hyperbolique d'équations linéaires avec une caractéristique double" C.R.A.S. Paris, tome 280, Série A, p443-445, 1975

[3] R. Berzin-J. Vaillant: "Parametrix du problème de Cauchy pour un système d'équations aux dérivées partielles linéaires à caractéristiques multiples" C.R.A.S. Paris, tome 283, Série A, p485-487, 1976

[4] R. Berzin-J. Vaillant: "Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples" J.Math.Pures et Appliquées. 58, 1979, p165-216

[5] A. Delcambre: "Localisation et conditions d'hyperbolicité forte pour les opérateurs différentiels matriciels avec les ordres de Leray-Volevîc" Thèse de 3ème cycle, Lille, janvier 1972

[6] J.C. De .Paris: "Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples, lien avec l'hyperbolicité" J. Math. Pures et Appli. t. 51, 1972, p231-256

[7] J.C. De .Paris: "Problème de Cauchy analytique à données singulières pour un opérateur différentiel bien décomposable" J. Math. Pures et Appli. t. 51, 1972, p465-488

[8] J.J. Duistermaat: "Application of Fourier integral" Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1971-1972

[9] H. Flaschka-G. Strang: "The correcness of the Cauchy problem" Adv. in Math. Vol. 6, n°3, 1971, p347-379

[10] V. Ivrii-V.M. Petkov: "Necessary conditions for the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic equations to be well-posed" Uspechi Math. Nauk, Vol. 29, n°5, 1974, p3-70

[11] D. Ludwic: "Exact and asymptotic solution of the Cauchy problem" Comm. on Pure and Appl. Math. Vol.13, p473-508

[12] B. Messirdi-A. Senoussaoui: " Parametrix du problème de Cauchy C^∞ pour un opérateur différentiel matriciel fortement hyperbolique muni des ordres de Leray-Volevîc" Accepté pour publication à "ZAA", Journal for Analysis and its Applications, Janvier 2005

[13] B. Messirdi-A. Senoussaoui: " Méthode BKW formelle et spectre des molécules polyatomiques dans l'approximation de Born-Oppenheimer" Canadian Journal of Physics, CJP, Vol. 79/4, 2001, p757-771

[14] S. Mizohata: "Solutions nulles et solutions non analytiques" J. Math. Kyoto Univ. p1-2, 1962

[15] J. Vaillant: "Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants" Ann. Inst. Fourier, Grenoble, Vol. 15, n°2, 1965, p225-311

[16] J. Vaillant: - "Remarques sur les systèmes fortement hyperboliques" J. Math. Pures et Appl. Vol. 50, 1971, p25-51. et - "Symétrie des opérateurs fortement hyperboliques 4×4 ayant un point triple caractéristique dans R^3" Ann. Univ. Ferraza Sez. VII Sc. Math. Suppl. Vol. XLV, 1999, p339-363

[17] J. Vaillant: "Problème de Cauchy caractéristique et propriétés des bicaractéristiques pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples de multiplicité paire" C.R.A.S. Paris, t. 267, 1968, p891-894.